

# ETUDE NUMERIQUE DE LA CONVECTION THERMOCAPILLAIRE D'UN FLUIDE A FAIBLE NOMBRE DE PRANDTL CONTENU DANS UNE CAVITEE AVEC SURFACE LIBRE CHAUFFEE.

D. BAAZIZ (\*), D. KALACHE (\*\*), R. YOUNSI (\*\*\*)

1. Etudiante en magister, Laboratoire de Mécanique des Fluides théorique et appliqué, Institut de Physique, U.S.T.H.B, E-mail : [badjamila@yahoo.fr](mailto:badjamila@yahoo.fr), Ref: 217/1.
2. Laboratoire de Mécanique des Fluides théorique et appliqué, Institut de Physique, U.S.T.H.B.
3. Laboratoire de Mécanique des Fluides théorique et appliqué, Institut de Physique, U.S.T.H.B.

## RESUME

Ce travail constitue une contribution à l'étude numérique de la convection thermocapillaire stationnaire d'un fluide à faible nombre de Prandtl, contenu dans une cavité carrée. Les parois verticales de la cavité sont maintenues à des températures constantes alors que la surface libre est soumise à un flux radiatif qui lui est normal. La simulation numérique est basée sur la méthode des volumes finis avec un maillage très serré aux voisinages des parois. Nous étudierons pour cette configuration originale, les effets combinés, gravitationnels et capillaires, en envisageant en premier le cas où les deux effets possèdent la même direction et par la suite le cas où ils sont en opposition. La description des états stationnaires a été détaillée pour une large gamme du nombre de Marangoni pour un nombre de Rayleigh égal à  $10^4$ . Ce travail montre la structure de l'écoulement dépend fortement de la valeur du nombre de Marangoni. L'écoulement des forces de volume domine celui induit par la convection thermocapillaire pour les faibles valeurs de Ma, alors que pour les grandes valeurs du nombre de Ma l'écoulement est principalement régi par les forces thermocapillaires.

**Mots clés :** convection thermocapillaire, force de volume, surface libre chauffée.

## NOMENCLATURE

<p>A : Rapport de forme de la cavité. <math>H/L</math>            g : Accélération de la pesanteur [<math>m\ s^{-2}</math>]            H : Hauteur de la cavité [m]            k : Conductivité thermique [<math>w\ m^{-1}K^{-1}</math>]            L : Largeur de la cavité. m            P : Pression.  <math>B_0</math> : Nombre de Bond = <math>Ra/Ma</math>            Ma : Nombre de Marangoni = <math>\gamma\Delta T L/\mu\alpha</math>            Pr : Nombre de Prandtl = <math>\nu/a</math>            Ra : Nombre de Rayleigh = <math>g\beta_r\Delta T H^3/a_p\nu</math>            t : Temps [s]            T : Température dimensionnelle [K]            U : Composante adimensionnelle horizontale du vecteur vitesse            V : Composante adimensionnelle verticale du vecteur vitesse            X : Coordonnée horizontale adimensionnelle            Y : Coordonnée verticale adimensionnelle</p>	<p><b>Symboles Grecs:</b>            a : Diffusivité thermique = <math>k/\rho C_p</math>            b : Coefficient d'expansion thermique. <math>k^{-1}</math>            r : Masse volumique. <math>kg/m^3</math>            σ : Tension de surface            ν : Viscosité cinématique. <math>m^2/s</math>            μ : Viscosité dynamique            α : Diffusivité thermique. <math>m^2/s</math>            g : Coefficient de tension de surface = <math>-\frac{\partial\sigma}{\partial T}</math>            ΔT : Différence de température entre les parois verticales = <math>T_c - T_f</math></p> <p><b>Indices:</b>            c : Paroi chaude            f : Paroi froide            0 : Référence</p>
--	---

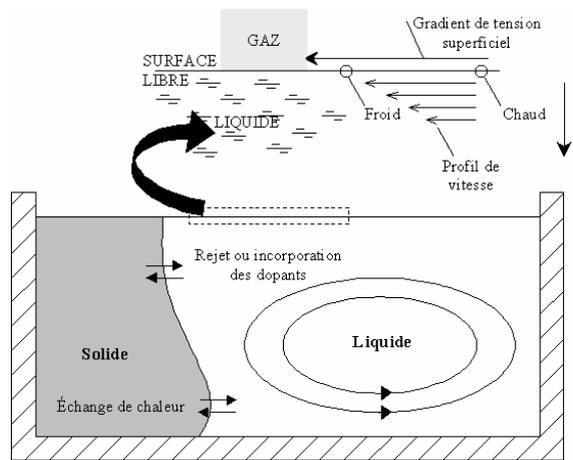
## 1. INTRODUCTION

Les problèmes de mouvement des fluides et de transfert de chaleur et de masse, générés ou altérés par les forces de volume ou de surfaces n'ont cessé de susciter un grand intérêt vu l'importance de ces phénomènes dans un grand nombre de domaines de la science et de la technologie (élaboration de matériaux, énergie solaire, refroidissement des cœurs des centrales nucléaires, météorologie, géophysique, etc.). Nous nous intéressons de façon plus spécifique aux applications liées à la croissance de mono-conducteurs ou alliages métalliques, dont les phases fluides correspondent à de faibles valeurs du nombre de Prandtl.

La présente étude, concerne le comportement de couches fluides, contenues dans une cavité rectangulaire ouverte, soumise à un gradient de température horizontal. Ce type de configuration concerne la croissance cristalline par la méthode de Bridgman horizontal (figure 1). Dans cette configuration, le fluide se met en mouvement dès qu'apparaît la moindre différence de température. Cependant, même dans un environnement de microgravité, la présence d'une interface liquide-gaz provoque des mouvements convectifs engendrés par les gradients de tension superficielle (forces thermocapillaires).

Plusieurs études ont déjà été consacrées aux effets de couplage, particulièrement par voie expérimentale. On pourra consulter les articles de Ostrach et al [1] et Peltier et al [2], bien que ces études soient effectuées pour des fluides tel que  $Pr > 1$ . Concernant les fluides à faible nombre de Prandtl, quelques études numériques ont déjà été réalisées. Nous citons essentiellement celles de Bergman et Keller [3] et Batoul, Labrosse [4], dans le cas  $Pr=0,01$ .

Dans notre étude, nous considérons un cas modélisant une situation où, les écoulements sont d'origine à la fois volumique et surfacique en envisageant le cas où les deux effets possèdent la même direction et le cas où ils sont en opposition. L'écoulement est examiné pour  $Ra=1.E4$ , pour différentes valeurs du nombre de Marangoni, mais avant de faire varier systématiquement les valeurs de ces deux paramètres, on essaye d'abord de caractériser l'écoulement obtenu quand les effets de thermocapillarité et d'Archimède sont d'égale intensité (situation de compétition). Pour cela, on considère les valeurs du couple  $(Ra, Ma)$  pour lesquelles on a la même valeur du maximum de la vitesse.



**Figure 1:** Représentation schématique de la méthode de Bridgman

## 2. FORMULATION DU PROBLEME

Les variations de température d'un point à un autre d'une interface induisent des variations de la tension de surface qui se traduit en:

$$s(T) = s(T_0) - \gamma(T - T_0)$$

Un gradient de température parallèle à la surface d'un liquide fait apparaître une contrainte tangentielle sur celle-ci. Ainsi au gradient de température suivant la direction  $x$ , correspond un gradient de tension de surface égal à :

$$\frac{ds}{dx} = \frac{ds}{dT} \frac{dT}{dx} = -\gamma \frac{dT}{dx}$$

A la surface libre, cette contrainte est équilibrée par la contrainte visqueuse correspondante. Ceci s'exprime mathématiquement par l'expression suivante:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

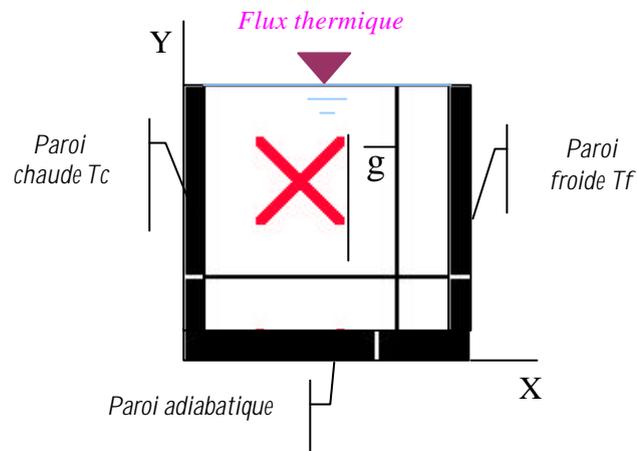
Comme on a supposé que la tension de surface ne varie qu'en fonction de la température, il vient :

$$-\gamma \frac{\partial T}{\partial x} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

Une inhomogénéité du champ thermique à la surface libre d'un liquide génère donc nécessairement un mouvement, qui est transmis en volume par viscosité. Ce type de convection est appelé convection thermocapillaire ou effet Marangoni. La configuration géométrique choisie dans notre travail est présentée sur la figure (2). Le fluide est confiné dans une cavité rectangulaire, de longueur  $L$  et de hauteur  $H$ , et présente une surface libre supposée droite indéformable sur laquelle est appliqué un flux thermique de la forme :

$$Q(x) = Q_0 \left( 1 - \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right)$$

Les parois verticales sont maintenues isothermes à des températures différentes afin d'assurer un gradient de température horizontal qui est à l'origine de l'écoulement de base. La paroi de droite est à une température froide  $T_f$ , et celle de gauche à une température chaude  $T_c$ , tandis que la paroi inférieure est thermiquement isolée. Le fluide est un liquide newtonien à faible nombre de Prandtl soumis à l'action du champ de la pesanteur.



**Figure2:** Géométrie du problème.

Le modèle physique formé par les équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie en régime stationnaire est construit avec les considérations suivantes :

- Le fluide est Newtonien, incompressible et en conditions d'écoulement laminaire.
- La variation de la densité obéit à l'approximation de Boussinesq et change uniquement avec la température.
- La tension de surface varie linéairement avec la température.
- A part la densité et la tension de surface, toutes les propriétés du fluide sont considérées constantes.
- La surface libre du liquide est supposée parfaitement plate.
- Les effets de dissipation visqueuse sont négligés.

## 2- 1. Étude adimensionnelle

les échelles de référence utilisées pour rendre le problème adimensionnel sont les suivantes :

- ⊕ La longueur  $L$  de la cavité pour l'échelle de longueur.
- ⊕ La vitesse caractéristique de diffusion thermique
- ⊕  $\frac{a}{L}$ , pour la vitesse.
- ⊕  $\Delta T = \frac{Q_0 L}{a}$ , pour l'écart de température  $T - T_0$
- ⊕  $T_0 = \frac{T_c - T_f}{2}$ , pour la pression.

Avec  $T_0 = \frac{T_c - T_f}{2}$ , la température moyenne

Les équations adimensionnelles s'écrivent de la façon suivante :

Équation de continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (1)$$

Équation de quantité de mouvement :

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \text{Pr} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (2)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \text{Pr} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \text{RaPr} \theta \quad (3)$$

Équation de l'énergie :

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (4)$$

## 2-2. Conditions aux limites

Les conditions aux limites associées aux équations précédentes sont :

En parois verticales :

$$U=V=0 \quad \theta = \theta_c = 0.5 \quad X=0 \quad (5)$$

$$U=V=0 \quad \theta = \theta_f = -0.5 \quad X=1 \quad (6)$$

En paroi horizontale inférieure :

$$U=V=0 \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad Y=0 \quad (7)$$

Au niveau de la surface libre :

$$V=0 \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = (1-X^2)^2 \quad Y=1 \quad (8)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = M_a \frac{\partial \theta}{\partial X}$$

Dans les équations précédentes, les paramètres adimensionnels suivants, présentent le comportement du système décrit plus haut.

Le nombre de Rayleigh thermique :

$$R_{ar} = \frac{g b \Delta T L^3}{n a}$$

Le nombre de Prandtl :

$$P_r = \frac{n}{a}$$

Le nombre de Marangoni thermique :

$$M_a = \frac{g \Delta T L}{m a}$$

## 2-3. Procédure numérique

Les équations du problème sont discrétisées à l'aide de la méthode de volumes finis Patankar [5] et l'algorithme de Simpler est utilisé pour le traitement du couplage vitesse pression. Un grand nombre de nœuds est nécessaire au voisinage des parois verticales pour résoudre plus précisément les phénomènes physiques présents notamment en régime de couche limite. Pour cela, nous avons utilisé un maillage sinusoidal 60x115 afin d'augmenter la densité des nœuds aux voisinages des parois et de la surface libre. La convergence de la solution numérique a été contrôlée localement. La norme maximale a été utilisée pour les composantes de la vitesse u, v et la température  $\theta$ . Le critère de la convergence à chaque itération est :

$$\text{Max} \left| \frac{(u, v, \theta)^{i+1} - (u, v, \theta)^i}{(u, v, \theta)^i} \right| \leq 10^{-6}$$

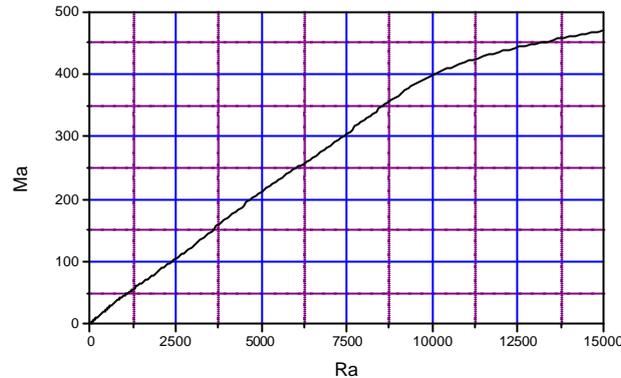
i et i+1 dénotent deux itérations consécutives.

## 3. RESULTATS ET DISCUSSION

Dans la figure (3), on a représenté le lieu des points à  $U_{max}$  commune. Cette courbe obtenue à partir de données relatives aux phénomènes réalisés séparément, nous indique les couples (Ra, Ma) pour lesquels il existe une réelle compétition, bien que la vitesse ne soit pas le seul élément physique permettant de mesurer l'intensité

de la convection. Elle montre aussi que  $B_0=1$  n'est pas l'expression qui correspond aux cas où les deux écoulements sont d'égal intensité,  $B_0 = \frac{Ra}{Ma}$ .

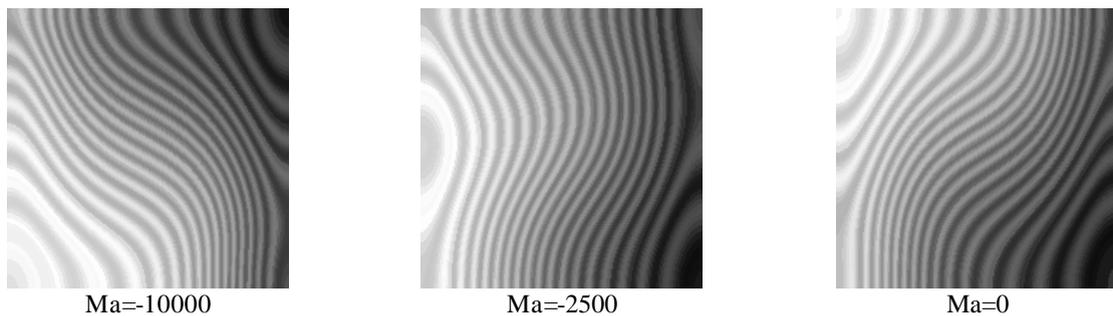
Nous présentons les résultats pour  $Ra=10000$ , deux cas sont envisagés suivant que la convection thermocapillaire génère, le long de l'interface liquide-gaz, un écoulement qui augmente la vitesse du mouvement de convection naturelle ( $Ma > 0$ ), ou au contraire la diminue ( $Ma < 0$ ).



**Figure(3) :** Positions des points  $(Ra, Ma)$  caractérisés par une même vitesse maximale  $U_{max}$ .

### 3.1- Situation de compétition ( $Ma < 0$ )

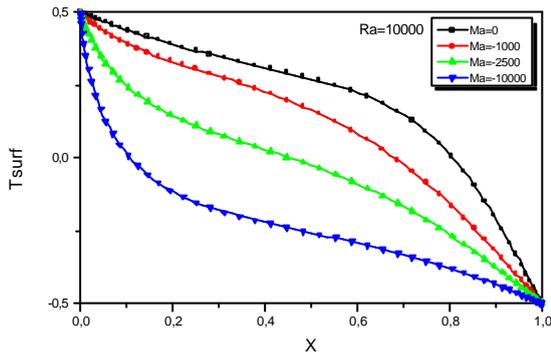
La structure du champ des isothermes, ainsi que la température au niveau de la surface libre sont présentés en figures (4) et (5). Pour les faibles valeurs de  $|Ma|$ , le fluide est entraîné de la paroi chaude vers la paroi froide. Les isothermes sont serrées, aux coins inférieurs de la cavité et, au niveau de la surface libre près de la paroi froide. Dans ce cas, l'effet de la convection de volume est dominant, la convection thermocapillaire jouant le rôle d'un effet perturbateur. A mesure que  $|Ma|$  augmente, le champ de température s'aligne, et tend vers une situation conductrice. Pour des valeurs de  $Ma$  comprises entre le cas de compétition et le cas où le nombre de Bond est égal à l'unité, les isothermes sont pratiquement des droites, et la température au niveau de la surface libre est presque linéaire. Ceci est bien clair pour  $Ma=2500$ . Au-delà de ce domaine, le champ thermique est inversé. Le fluide est entraîné vers la paroi chaude, créant une situation plus déstabilisante. Ce profil correspond aux caractéristiques de la convection thermocapillaire, l'influence de la convection thermogravitationnelle restant ici négligeable.



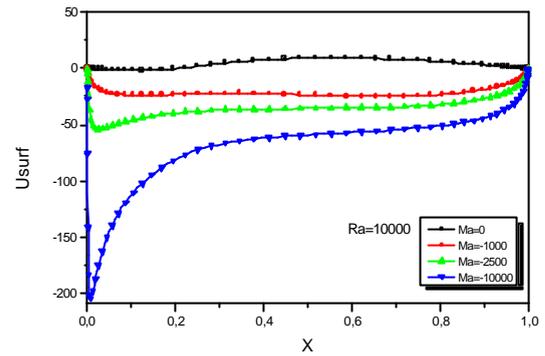
**Figure(4):** Évolution du champ de température pour  $Ra=10000$ , ( $Ma < 0$ ).

L'évolution du champ dynamique est présenté sur les figures (6) et (7). Lorsque  $|Ma|$  est proche de l'unité, on observe le régime caractéristique de la convection gravitationnelle, l'influence de la convection thermocapillaire restant ici négligeable. En situation de compétition, on constate la présence de faibles recirculations au niveau des coins inférieurs et du côté de la paroi chaude, très proche de la surface libre. Ces cellules sont d'origine thermogravitationnelle, puisque c'est le phénomène dominant pour ces valeurs du nombre de Marangoni, de plus elles apparaissent dans le cas thermogravitaire pur ( $Ma=0$ ).

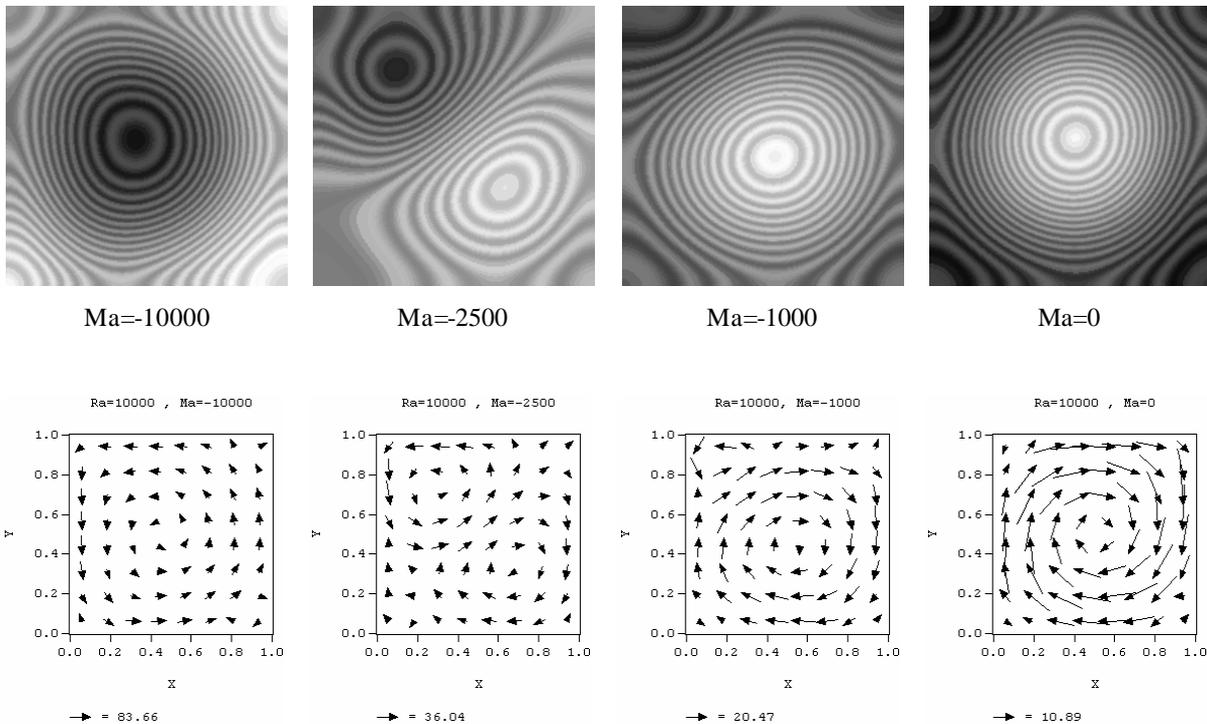
A mesure que  $|Ma|$  croît, la structure de l'écoulement s'achemine graduellement vers un régime semblable à la configuration de convection thermocapillaire. La recirculation, située proche de la surface libre, occupe de plus en plus de volume, aux dépens de la cellule principale. Pour les cas de compétitions, où le couple  $(Ra, Ma)$  possède pratiquement le même  $U_{max}$ , c'est l'effet de convection de volume qui est dominant, mais on remarquera que la convection thermocapillaire se manifeste en surface avec un écoulement contra-rotatif appréciable. Ceci est nettement clair pour  $Ma=-1000$ . Le cas  $Ra=10000$ , avec  $Ma=-2500$ , est plus intéressant, l'écoulement est divisé en deux cellules contrarotatives de même intensité indiquant que les forces de volume et de surface sont de même intensité. La recirculation située dans la partie inférieure gauche de la cavité, se déplace vers le milieu de la cavité, entre les deux cellules, et prend par la suite peu à peu de l'importance, puis prend moins d'étendu formant la cellule déjà connue en convection de Marangoni.



**Figure(5) :** Profil de température à la surface libre pour  $Ra=10000$ ,  $(Ma < 0)$ .



**Figure(6) :** Profil de vitesse à la surface libre pour  $Ra=10000$ ,  $(Ma < 0)$ .



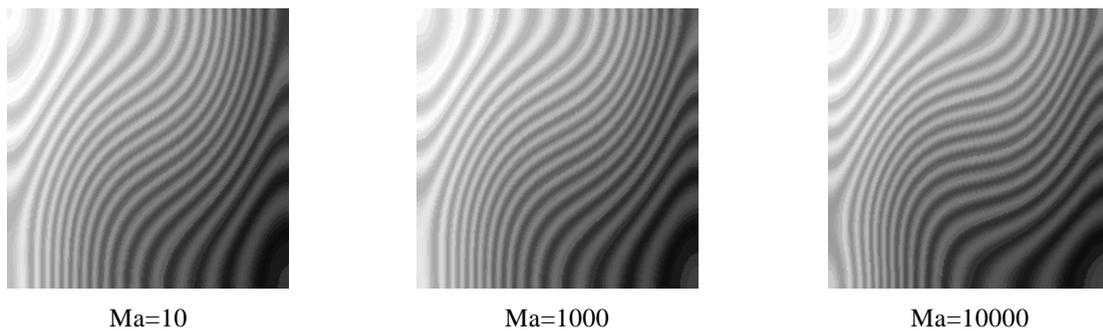
**Figure(7):** Évolution des isocourants et de la vitesse pour  $Ra=10000$ ,  $(Ma < 0)$ .

### 3.2- Situation de collaboration ( $Ma > 0$ )

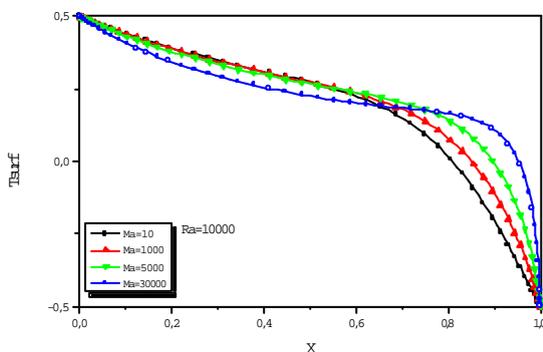
Nous représentons sur les figures (8) et (9), l'évolution du champ des isothermes et de la température au niveau de la surface libre. Pour les faibles valeurs du nombre de Marangoni, la chaleur est advectée de la surface libre vers la paroi froide engendrant ainsi, un resserrement des isothermes au niveau de la paroi froide près de la surface libre. Par contre l'écoulement de retour au niveau de la paroi adiabatique entraîne un resserrement des isothermes près de la paroi chaude. Notons aussi que de forts gradients de température caractérisent la région proche de la paroi froide.

L'augmentation de  $Ma$ , produit une forte stratification thermique positive caractérisant ainsi une domination des effets thermocapillaires. Soulignons que la contribution de l'écoulement thermocapillaire est constatée lorsque  $Ma$  dépasse les valeurs de compétitions, 500. Un régime de transport de chaleur fortement convectif est observé, et les gradients de température sont intensifiés et se déplacent vers la paroi froide.

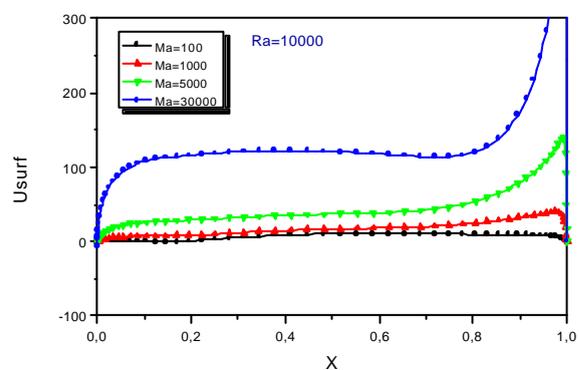
Nous présentons l'évolution des isocourants ainsi que la vitesse au niveau de la surface libre du cas  $Ma > 0$ , sur les figures (10) et (11). L'examen des figures montre que pour les faibles valeurs du nombre de Marangoni (aux dessous des valeurs de compétition), l'écoulement est caractérisé par une seule cellule occupant pratiquement tout le volume de la cavité. Alors que le profil de la vitesse au niveau de la surface libre montre une diminution de celle ci près de la paroi froide, due à la présence de faibles recirculation d'origine thermogravitaire. Ceci est nettement clair pour  $Ma$  égale à 100, indiquant ainsi que les forces de volume sont dominantes. L'augmentation du nombre de Marangoni entraîne un accroissement de la vitesse débitante. L'écoulement est caractérisé par une seule cellule moins volumineuse que le cas thermogravitaire avec d'importantes recirculations au niveau de la paroi adiabatique, caractérisant ainsi un écoulement thermocapillaire prépondérant. Les résultats présentés montrent que les mouvements thermocapillaires au sommet de la couche fluide renforcent la stabilité de l'écoulement, du fait que la valeur critique du nombre de Rayleigh augmente avec la présence des forces thermocapillaires.



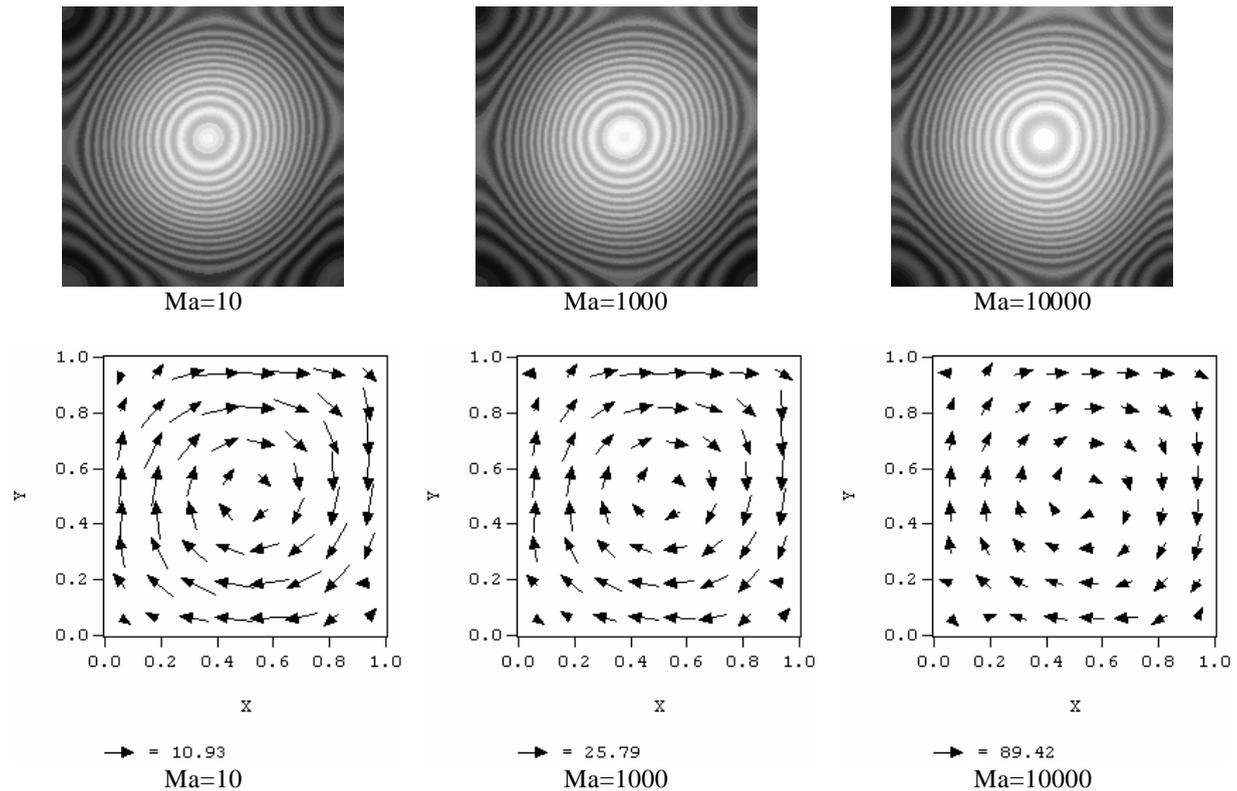
**Figure(8):** Évolution du champ de température pour  $Ra=10000$ , ( $Ma > 0$ )



**Figure(9) :** Profil de température à la surface libre pour  $Ra=10000$ . ( $Ma > 0$ )



**Figure(V-10) :** Profil de vitesse à la surface libre pour  $Ra=10000$  ( $Ma > 0$ )



**Figure (11) :** Évolution des isocourants et de la vitesse pour  $Ra=10000$ , ( $Ma > 0$ ).

#### 4. CONCLUSION

Les considérations que nous avons apportées dans l'étude de la convection thermocapillaire couplée à la convection l'écoulement régi par les forces de volume nous ont révélé que:

L'effet thermocapillaire a une influence notable sur la convection de volume dans le cas ( $Ma < 0$ ), une compétition appréciable est observée produisant une inversion de la déformation du champ des isothermes.

Dans le cas ( $Ma > 0$ ), l'écoulement thermocapillaire au sommet de la couche fluide induit une stratification thermique positive.

La valeur critique du nombre de Rayleigh augmente avec la présence de l'écoulement thermocapillaire.

#### RÉFÉRENCES

- [1] S. Ostrach, "Low-Gravity Fluid flow", Annu. Rev. Fluid Mech. Vol. 14 (1982), pp. 313-345.
- [2] L. J. Peltier, S. Biringen, Time-Dependent thermocapillary convection in a rectangular cavity: numerical results for a moderate Prandtl number fluid. J.Fluid Mech. Vol, N°257 (1993), pp.339-357.
- [3] J. R. Keller, T. L. Bergman, Thermosolutal inducement of no-slip free surfaces in combined Marangoni-Buoncy driven cavity flows, J.Fluid Mech. Vol, N°112 (1990), pp.363-369.
- [4] A. BATOUL, G. LABROSSE, «convection naturelle gravitationnelle et capillaire en cavité avec une surface libre chauffée», C. R. Acad. Sci. Paris, t. 321, Serie II b (1995), p 289-295.
- [5] S. V. Patankar , «Numerical Heat Transfer and Fluid Flow», Hemsifer, Washington, D.C, U.S.A (1980).