

# TRANSFERT DE CHALEUR LORS DU DEVELOPPEMENT D'UNE COUCHE LIMITE D'UN ECOULEMENT VISQUEUX AU SEIN D'UNE TUYERE SUPERSONIQUE

T.Boussoukaia <sup>(1)</sup>  
(1) Attaché de Recherche  
Division Pompage

Station d'expérimentation des équipements solaires en milieu saharien ( SEES/MS)-ADRAR  
BP 478 Route de Reggane-ADRAR

Tél. : 049.96.51.68

Fax : 049.96.04.92

Email : [tahar\\_bouss@mail.univ-tlemcen.dz](mailto:tahar_bouss@mail.univ-tlemcen.dz)  
[T11111971@Yahoo.fr](mailto:T11111971@Yahoo.fr)

## RESUME

En réalité l'écoulement d'un fluide visqueux s'adhère à la paroi, et sa vitesse est nulle, et croît au fur et à mesure qu'on s'éloigne de celle-ci, jusqu'à atteindre sa valeur de l'écoulement incident à la frontière de la couche limite. Dans ce cas, le phénomène du transfert de chaleur au sein de la couche limite se révèle d'une grande importance pour les applications techniques. Pour étudier ce phénomène, considérons le cas d'une couche limite stationnaire et bidimensionnelle. L'équation de l'énergie est donc en jeu, et en général couplée avec l'équation de continuité et les équations de quantité de mouvement. Il est clair, de part la complexité de ces équations, que l'obtention de leur solution n'est en général possible qu'après mise en œuvre de méthode numérique.

En tenant compte toujours des caractéristiques thermodynamiques et géométriques déterminées dans le cas de l'écoulement parfait qui constitueront d'ailleurs, les valeurs de ceux de l'écoulement libre à la frontière de la couche limite, et ce dans le but d'évaluer les épaisseurs caractéristiques de celle-ci, ainsi que la température de la paroi en considérant toujours l'effet de la haute température sur les propriétés du fluide.

Une adaptation de la méthode approximative de calcul de couches limites laminaires de E-GRUSCHWITZ fut utilisée avec succès pour des écoulements établis, bidimensionnel et visqueux de fluides compressible sur des parois présentant un gradient de température comme le cas des tuyères supersoniques. Cette technique a permis, en outre, la connaissance vitale de la température de la paroi ainsi que la prévision du point de décollement. En plus, l'utilisation de la transformation de MANGLER a permis de retrouver les caractéristiques de la couche limite en configuration axisymétrique.

**Mots-clés:** Couche limite, Transfert de Chaleur, Méthode de E-GRUSCHWITZ, Transformation de MANGLER.

## NOMMENCLATURE

A : Section de la tuyère ( $\text{mm}^2$ )

a : Vitesse locale de son (m/s)

$C_e$  : Coefficient d'entraînement

$C_f$  : Coefficient de frottement

$C_p$  : Chaleur spécifique par unité de masse à pression constante (j/kg.k)

$C_v$  : Chaleur spécifique par unité de masse à volume constant (j/kg.k)

H : facteur de forme

$h_i$  : Enthalpie d'arrêt par unité de masse (j)

L : Longueur de la tuyère (mm)

M : Nombre de Mach

Pr : Nombre de Prandtl

P : Pression (pa)

r : Constante de gaz (j/kg.k)

Re : Nombre de Reynolds

S : Nombre de Sutherland

T : Température ( $^{\circ}\text{K}$ )

U : Module de vitesse local (m/s)

u : Composante horizontale du vecteur vitesse (m/s)

v : Composante verticale du vecteur vitesse (m/s)

x : Coordonnée longitudinale (mm)

$x_i$  : ième coordonnée (mm)

y : Coordonnée perpendiculaire à la paroi (mm)

### **Symboles grecs**

d : Epaisseur conventionnelle de la couche limite (mm)  
d<sub>1</sub> : Epaisseur de déplacement (mm)  
d<sub>2</sub> : Epaisseur de quantité de mouvement (mm)  
d<sub>3</sub> : Epaisseur d'énergie cinétique (mm)  
? : Paramètre de Pohlhausen  
μ : Coefficient de viscosité dynamique (kg/m.s)  
? : Coefficient de viscosité cinématique (m<sup>2</sup>/s)  
t<sub>p</sub> : Contrainte pariétale (N/mm<sup>2</sup>)

### **Indices**

e : Condition à la frontière de la couche limite  
p : Condition à la paroi  
^ : Transformation de Mangler  
i : Condition au point d'arrêt  
s : Section de sortie

## **1-INTRODUCTION**

Dans le présent travail on considère le cas d'écoulement réel ,en tenant compte toujours des caractéristiques thermodynamiques et géométriques déterminées dans le cas de l'écoulement parfait [1] qui constitueront d'ailleurs ,les valeurs de ceux de l'écoulement libre à la frontière de la couche limite , et ce dans le but d'évaluer les épaisseurs caractéristiques de celle-ci ,ainsi que la température de la paroi en considérant toujours l'effet de la haute température sur les propriétés du fluide. D'autre part, pour une approche plus réelle du problème, on tiendra compte de l'asymétrie de l'écoulement.

## **2-COUCHE LIMITE CONSIDEREE DU POINT DE VUE THERMIQUE**

L'expérience montre que le long de la normale de la paroi, la température varie rapidement au voisinage de la paroi. La variation de la température en fonction de la distance y est donnée par une courbe de même allure que celle qui donne la variation de la vitesse u en fonction de y : la température part de la valeur T<sub>p</sub> qui est la température de la paroi et tend très rapidement vers la valeur asymptotique T<sub>e</sub> qui est la température de l'écoulement libre.

En particulier, si la température de l'écoulement libre est T<sub>e</sub>, dans le cas d'une paroi athermane, paroi constituée par un matériau isolant et qui n'émet ni ne reçoit aucun flux de chaleur par rayonnement, la température de la paroi aura une valeur T<sub>f</sub>, appelée température pariétale de frottement, supérieure à la valeur T<sub>e</sub>. L'écart de température T<sub>f</sub>-T<sub>e</sub>, toujours positif, caractérise l'échauffement cinétique au niveau de la paroi.

## **3-HYPOTHESES**

Dans cette étude on adoptera les hypothèses suivantes :

- La couche limite est calculée à partir du col de la tuyère.
- La couche limite qui se développe dans le divergent est supposée laminaire.
- Le fluide est compressible et thermiquement parfait mais calorifiquement imparfait.
- L'écoulement est réel, établi et bidimensionnel dans une première étape, puis à l'aide d'une transformation appropriée, on déterminera les caractéristiques de l'écoulement dans le cas axisymétrique.

## **4-EQUATIONS DE BASE DE LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE**

$$\text{*Equation de continuité} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\text{*Equation de quantité de mouvement} \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$\text{*Equation de l'énergie} \quad u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{C_p} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (3)$$

## 5-MODEFICATION DES EQUATIONS DE QUANTITE DE MOUVEMENT ET D'ENERGIE

En introduisant les définitions des épaisseurs caractéristiques de la couche limite à savoir  $d$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$ ,  $d_h$ , et  $d_u$  qui sont définis dans [1] on trouve :

\*L'équation intégrale de quantité de mouvement :

$$(dd_2/dx) + (d_2/ue)(du_e/dx)[2+(d_1/d_2)M^2]=(\mu_p/\rho_e u^2 e)(\partial u/\partial y)_p \quad (4)$$

\*L'équation intégrale de l'énergie:

$$(dd_3/dx) + (d_3/ue)(du_e/dx)[3-(2-\gamma)M^2]=(2/\rho_e u^3 e)\mu_p (\partial u/\partial y)^2 dy \quad (5)$$

## 6-METHODE DE CALCUL DE LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE

La méthode approximative qui sera utilisée dans cette étude est basée sur l'algorithme de E-GRUSHWITZ [2] qu'on adoptera comme procédure de résolution. Cette méthode est applicable à une paroi adiabatique de forme géométrique quelconque, qui à l'instar de la méthode de Paulhausen.

Elle admet une distribution polynomiale de quatrième degré de la vitesse telle que [2]. ;

$$u/U_e = c_1 \eta + c_2 \eta^2 + c_3 \eta^3 + c_4 \eta^4 \quad \text{avec } \eta \text{ une variable d'espace adimensionnelle.}$$

D'autre part, on suppose aussi une distribution polynomiale de l'enthalpie (qui va de soit avec la température), on peut écrire :

$$(1-u/U_e)(\eta/e) = b + b_1 \eta + b_2 \eta^2 + b_3 \eta^3 + b_4 \eta^4 + b_5 \eta^5 \quad \text{avec } b = \eta_e/\eta_p$$

En introduisant les expressions des épaisseurs  $d$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$ , et après intégration, on aboutit aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} d_1/d &= (3/10) - (1/120)\eta \\ d_2/d &= (1/63)[(37/55) - (1/15)\eta - (1/144)\eta^2] \\ d_3/d &= (798048 - 4656\eta - 758\eta^2 - 7\eta^3)/4324320 \end{aligned}$$

En introduisant ces variables dans les équations intégrales (4) et (5), et après simplification et regroupement des termes, il vient :

$$\left\{ \begin{aligned} d_2 \frac{U_e}{n_e} \frac{dd_2}{dx} &= F_1(k) - \frac{k}{b} (2 - M^2 F_2(k)) & (6) \\ b &= \left( 1 + \frac{g-1}{2} M^2 \right) \frac{1 + M^2 F_3(k)}{1 + M^2 F_4(k)} & (7) \end{aligned} \right.$$

Où  $F_1, F_2, F_3, F_4$  sont des fonctions données [2]

Les équations (6) et (7) constituent les modifications des équations intégrales de quantité de mouvement et d'énergie.

D'autre part, la contrainte de cisaillement est donnée par :

$$\frac{t_p}{\rho_e U_e^2} = \frac{\nu_e}{U_e d} \left( 2 + \frac{1}{6} I \right) \quad \text{Car } t_p = \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)_p$$

## 7-CONDITIONX AU LIMITE

A  $x=0$  correspondant à la constante au col, l'épaisseur de la couche limite  $d$  ainsi que l'épaisseur de quantité de mouvement  $d_2$  sont nulles.

D'après l'équation (6) on a :

$$F_1(k) - \frac{k}{b} (2 - M^2 F_2(k)) = 0 \quad (8)$$

Au col :  $M=1, k=k_0$  et  $b=b_0=(\gamma+1)/2 + (1+F_3(k_0))/(1+F_4(k_0))$

En prenant cela dans l'équation (5) il s'en suit :

$$F_1(k_0)/(2-F_2(k_0)) = (2k_0/\gamma+1)(1+F_3(k_0))/(1+F_4(k_0)) \quad (9)$$

La solution de cette équation fournit la valeur initiale du facteur de forme  $k_0$  pour un gaz donné.

## 8-RESOLUTION

Le problème revient à résoudre le système d'équations (6) et (7) avec la condition initiale exprimée par l'équation (9).

Posons  $Z=d^2_2$

L'équation (6) exprimée en un point i de la paroi devient :

$$dZ/dx|_i = (2\gamma e_i/U e_i) [F_1(k_i) - k_i/b_i] (2-M^2_1 F_2(k_i)) \quad (10)$$

Qui est une équation différentielle non linéaire, qu'on peut résoudre numériquement.

En résumé, le problème revient à résoudre le système couplé d'équations différentielles non linéaires qui après discrétisation devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{i+1} = \frac{2v_{ei}(x_{i+1}-x_i)F(k_i)}{U_{ei}} + Z_i \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{i+1} = b_{i+1} \frac{Z_{i+1} U_{ei+1} - U_{ei}}{v_{ei+1} x_{i+1} - x_i} \end{array} \right. \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{i+1} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{i+1}^2 \right) \frac{1 + M_{i+1}^2 F_3(k_{i+1})}{1 + M_{i+1}^2 F_4(k_{i+1})} \frac{T_{pi+1}}{T_{ei+1}} \end{array} \right. \quad (13)$$

Avec :  $Z_i = d^2_{2i}$

## 9 CONSIDERATION SUR L'AXYSIMETRIE DE L'ECOULEMENTI

Il existe une méthode dite : transformation de MANGLER qui permet de retrouver des caractéristiques de la couche limite dans le cas axisymétrique à partir du cas bidimensionnel qu'on a traité au paravent, cette méthode consiste à faire la transformation des coordonnées et des vitesses à l'aide des relations suivantes :

$$x = \frac{1}{L^2} \int r^2(\bar{x}) d\bar{x} \quad (14)$$

$$y = \frac{r(\bar{x})}{L} \bar{y}, \quad u = \bar{u}, \quad v = \frac{L}{r} \left[ \bar{r} + \frac{r'}{r} \bar{y} \bar{u} \right] \quad (15)$$

$$U_e = \bar{U}_e \quad (16)$$

ou  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{U}, \bar{r}, \bar{U}_e$  sont les paramètres de l'écoulement dans le cas axisymétrique,  $r(\bar{x})$  est le rayon de la tuyère et L est la longueur sur laquelle est calculé le nombre de Reynolds.



Pour adapter cette transformation à notre cas, dérivant l'équation (14) et (16), on obtient :

$$d\bar{x} = \frac{L^2}{r^2(\bar{x})} dx$$

$$\frac{dU_e}{dx} = \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}}$$

Rapportant ces deux dernières équations dans l'équation (6), on obtient :

$$\frac{d_2\bar{U}_e}{n_e} \frac{dd_2}{d\bar{x}} = \frac{r^2(\bar{x})}{L^2} \left[ F_1(k) - \frac{k}{b} (2 - M^2 F_2(k)) \right] \quad (17)$$

Cette équation différentielle peut être résolue de la même manière que l'équation (6), étant donné qu'on a la valeur du rayon r du divergent en fonction de l'abscisse x et que la longueur L est connue aussi.

## 10-RESULTATS ET CONCLUSION

D'après les graphes (1), on constate que la température à la paroi  $T_p$  est supérieure à la température de l'écoulement libre, cela est dû au fait que l'énergie cinétique à la frontière de la couche limite diminue au fur et à mesure qu'on s'approche de la paroi (diminution de la vitesse) et se transforme en énergie thermique (sous forme d'enthalpie) selon le principe de conservation de l'énergie.

D'autre part, on constate que le rapport  $T_p/T_e$  varie considérablement avec la température génératrice et le nombre de Mach de sortie. Ainsi le rapport  $T_p/T_e$  diminue si la température génératrice  $T_o$  augmente, ceci est une conséquence de l'augmentation de l'épaisseur de la couche limite qui entraîne la diminution relative de la température ( $T_p-T_e$ ) à la paroi pour un flux de chaleur constant échangé par conduction entre la paroi de la tuyère et l'écoulement libre à travers la couche limite.

Cela traduit aussi par l'augmentation des épaisseurs  $d_{3e}$  et  $d_h$  qui caractérisent respectivement les pertes en énergie et en enthalpie.

Dans ce travail, et dans une première étape, on a résolu le problème de couche limite laminaire en considérant que le fluide était compressible, et que l'écoulement était stationnaire et bidimensionnel en tenant compte de l'effet de la haute température sur les propriétés du fluide. Ensuite dans une seconde étape, on montre que le cas de l'hypothèse simplificatrice de l'écoulement bidimensionnel peut être reprise et amélioré en considérant l'axisymétrie de l'écoulement qui reflète le cas réel de la forme de la tuyère, et ceci à l'aide de la transformation de **Mangler**.

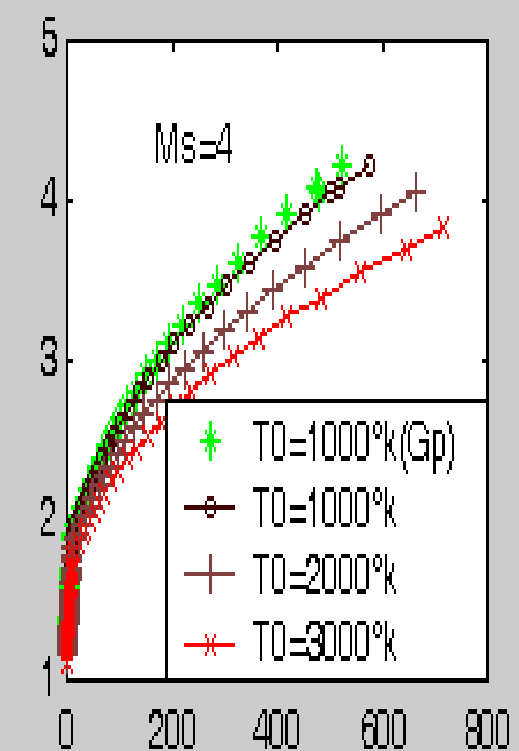
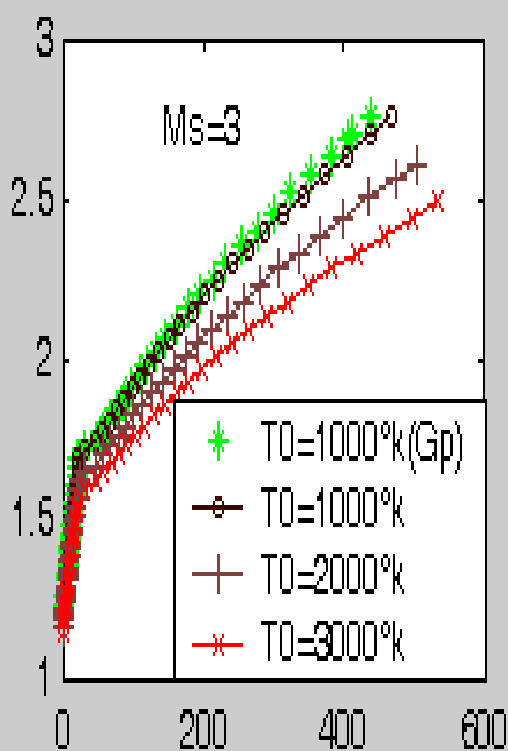
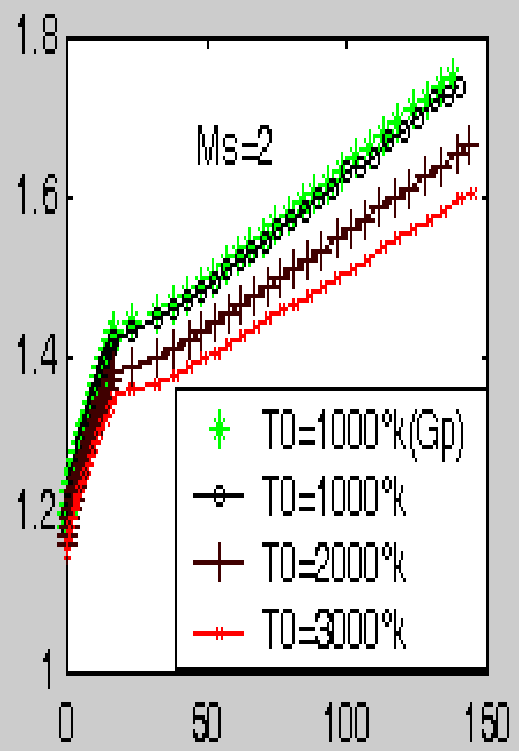
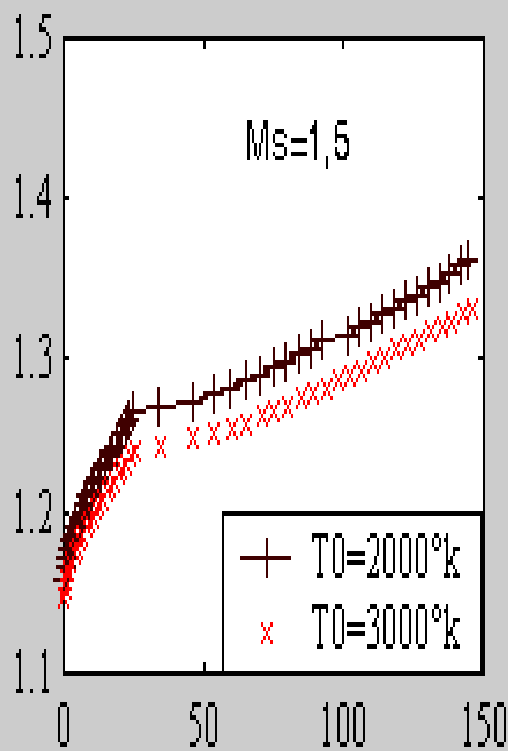
Pour cela on a utilisé la méthode de **Gruschwitz** qui permet de prédire le point de décollement et la température de la paroi.

D'après les résultats obtenus, on constate en premier lieu que les épaisseurs caractéristiques de la couche limite augmentent considérablement avec la température génératrice, en même temps que le rapport des températures de la paroi et de l'écoulement libre diminue, les interprétations de ce phénomène ont été apportées.

## REFERENCES

- [1] Ingel, Ryming, "Dynamique des fluides", presse polytechnique romand, Lausanne Suisse (1984)
- [2] Hermann SCHlichting, "Boundary layer theory" seventh edition
- [3] Marcel Sédille, "Turbomachines: Hydrauliques et Thermiques", Tome IV Mécanique des fluides, Masson et C<sup>ie</sup> Editeurs (1970).





Graph (1) : Variation du rapport des températures  $b = T_p/T_e$  pour différent nombres de mach de sortie  $Ms$  et Température génératrice  $T_0$