

# ETUDE DE LA CONVECTION NATURELLE DANS UNE CAVITE RECTANGULAIRE HORIZONTALE UNIFORMEMENT CHAUFFEE PAR LE BAS ET PAR UN COTE VERTICAL

M. LAMSAADI<sup>1</sup>, M. NAÏMI<sup>2</sup>, M. HASNAOUI<sup>3</sup>

<sup>1 et 2</sup>Université Cadi Ayyad, Faculté des Sciences et Techniques, UFR de Chimie Appliquée et Sciences de l'Environnement, Equipe de Modélisation des Ecoulements et des Transferts (EMET), B.P. 523, Béni-Mellal, Maroc, E-mail : [naimi@fstbm.ac.ma](mailto:naimi@fstbm.ac.ma) ou [naimima@yahoo.fr](mailto:naimima@yahoo.fr)

<sup>3</sup>Université Cadi Ayyad, Faculté des Sciences Semlalia, UFR de Thermique et Mécanique des Fluides, Laboratoire de Mécanique des Fluides et Energétique (LMFE), B.P. 2390, Marrakech, Maroc

## RESUME

Dans le cas d'une cavité rectangulaire horizontale remplie d'un fluide non-newtonien et chauffée, de façon uniforme, horizontalement et verticalement, il est possible d'utiliser l'hypothèse d'un écoulement parallèle pour obtenir une solution analytique décrivant les champs d'écoulement et de température dans la région centrale de la cavité. On démontre ainsi que des solutions multiples sont possibles. La solution analytique ainsi obtenue est validée numériquement en résolvant les équations bidimensionnelles régissant par une méthode aux différences finies.

**Mots clés** : Convection naturelle / cavités allongées / fluides non-Newtoniens / solutions analytique et numérique.

## NOMENCLATURE

A	rapport d'aspect, $L'/H'$ , Eq.(9)
a	proportion entre les flux de chaleur horizontal et vertical
C	gradient horizontal de température adimensionnel
g	accélération gravitationnelle, $m/s^2$
$H'$	hauteur de cavité, m
$k_0$	indice de consistance pour un fluide d'Ostwald, $Pa s^{n_0}$
$L'$	longueur de la cavité, m
$n_0$	indice de comportement ou de structure pour un fluide d'Ostwald
Nu	nombre de Nusselt local, Eq. (12)
Pr	nombre Prandtl généralisé, Eq. (9)
$q'$	densité de flux de chaleur, $w/m^2$
Ra	nombre Rayleigh généralisé, Eq. (9)
T	température adimensionnelle, $(T' - T'_0)/\Delta T^*$
$T'_0$	température de référence, K
$\Delta T^*$	température caractéristique, $q' H' / \lambda$ , K
u, v	composantes de vitesse adimensionnelle, $(u', v')/(\alpha/H')$
x, y	coordonnées adimensionnelles, $(x', y')/H'$
$\alpha$	diffusivité thermique, $m^2/s$
$\beta$	coefficient d'expansion volumétrique, $1/K$
$\lambda$	conductivité thermique, $W/(m.K)$
$\mu$	viscosité dynamique newtonienne, Pa.s
$\mu_a$	viscosité apparente adimensionnelle pour un fluide d'Ostwald, Eq. (6)
$\rho_0$	masse volumique du fluide, $kg/m^3$
$\Omega$	vorticité adimensionnelle, $\Omega'/(\alpha/H'^2)$
$\psi$	fonction de courant adimensionnelle, $\psi'/\alpha$
'	variables adimensionnelles

c	valeur relative au centre de la cavité
0	valeur de référence
max	valeur maximale

## 1. INTRODUCTION

Dans différentes situations physiques et applications technologiques, la convection naturelle joue un rôle important puisqu'elle peut être à l'origine des écoulements de fluides et des échanges de chaleur et/ou de masse. L'étude d'un tel phénomène, dont l'importance est dictée par le rôle qu'il joue dans divers secteurs industriels, a conduit à une imposante bibliographie spécialisée qui s'est accumulée au fur des années.

Une revue de la littérature montre que la cavité rectangulaire est un exemple de configuration extensivement étudiée [1-4]. Les travaux s'y rattachant sont en fait si nombreux et variés qu'il devient impensable de les citer tous. De plus, malgré cette abondance apparente, le problème reste loin d'être épuisé. La poursuite de la recherche se rapportant au cas de la cavité rectangulaire apporte souvent des renseignements précieux et montre que les connaissances déjà acquises restent loin d'être suffisantes pour prédire correctement l'état de l'écoulement du fluide et le transfert de chaleur dans de telles configurations. Aussi, la recherche actuelle témoigne-t-elle de la carence relative des études se rapportant aux fluides non-Newtoniens dont la présence couvre divers secteurs industriels (industries agroalimentaires, industries chimiques, etc....).

L'objectif de la présente étude consiste à développer une solution analytique afin de décrire les écoulements de convection naturelle et les transferts thermiques au sein d'une cavité rectangulaire, horizontale confinant un fluide non-Newtonien dont le comportement rhéologique est en loi de puissance. La convection est consécutive à l'application de densités de flux de chaleur uniformes sur les parois inférieure et verticale gauche de la cavité. Avec l'approximation d'un écoulement parallèle, une solution analytique, donnant les distributions de la vitesse et de la température dans le cas d'une cavité allongée ( $A \gg 1$ ), est obtenue. Les équations de la convection sont aussi résolues numériquement dans leur intégralité par le biais d'une approche aux différences finies et ce, dans le but de démontrer la validité des résultats analytiques. Les effets des différents paramètres, notamment celui du nombre de Rayleigh,  $Ra$ , d'une constante,  $a$ , donnant la proportion entre les flux de chaleur horizontal et vertical, et de l'indice de comportement,  $n_0$ , sont également analysés.

## 2. EQUATIONS GOUVERNANTES

Le système physique, considéré, consiste en une cavité rectangulaire, horizontalement allongée, remplie d'un fluide non-Newtonien dont le comportement rhéologique peut être décrit par le modèle, en loi de puissance, d'Ostwald. Pour générer la convection au sein de la cavité, des flux de chaleur uniformes sont imposés, à des proportions différentes, aux parois rigides horizontales et verticales limitant celle-ci (Fig. 1).

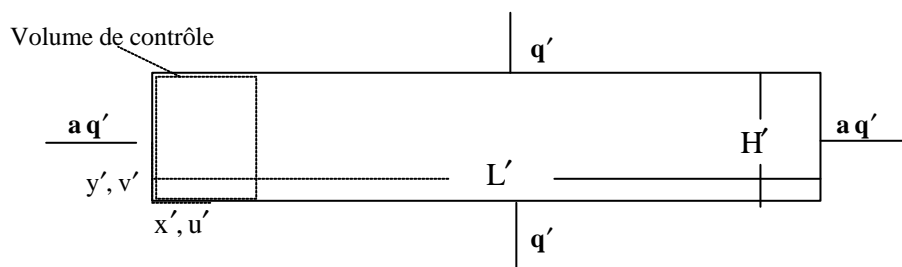


Fig. 1 : Modèle physique et système de coordonnées

En supposant que l'hypothèse de Boussinesq s'applique et que la dissipation visqueuse est négligeable, les équations adimensionnelles régissant la convection, écrites en formulation  $(\Psi, \Omega, T)$  dans un système de coordonnées cartésiennes, sont :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial u \Omega}{\partial x} + \frac{\partial v \Omega}{\partial y} = \text{Pr} \left[ \mu_a \left[ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right] + 2 \left[ \frac{\partial \mu_a}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \mu_a}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right] \right] + S_o \quad (1)$$

pour le transport de la vorticité,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u T}{\partial x} + \frac{\partial v T}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2)$$

pour l'énergie et

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\Omega \quad (3)$$

pour la fonction de courant (équation de Poisson), où

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \mu_a = \left[ 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^2 \right]^{\frac{n_a-1}{2}} \quad (4)$$

et

$$S_\alpha = Pr \left[ \left[ \frac{\partial^2 \mu_a}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mu_a}{\partial y^2} \right] \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] - 2 \frac{\partial^2 \mu_a}{\partial x \partial y} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] \right] + Pr Ra \frac{\partial T}{\partial x} \quad (5)$$

Pour fermer le problème, les conditions aux limites adimensionnelles suivantes sont utilisées :

$$u = v = \Psi = \partial T / \partial x + a = 0 \text{ en } x = 0 \text{ et } A ; u = v = \Psi = \partial T / \partial y + 1 = 0 \text{ en } y = 0 \text{ et } 1 \quad (6)$$

Les groupements adimensionnels A, Pr et Ra représentent respectivement le rapport d'aspect de la cavité et les nombres de Prandtl et de Rayleigh généralisés. Ils sont définis comme suit :

$$A = \frac{L'}{H'}, Pr = \frac{(k_0 / \rho_0) H'^{2-2n_0}}{\alpha^{2-n_0}} \text{ et } Ra = \frac{g \beta H'^{2n_0+2} q'}{(k_0 / \rho_0) \alpha^{n_0} \lambda} \quad (7)$$

A ces paramètres s'ajoute le nombre de Nusselt, traduisant le transfert de chaleur dans la direction transversale :

$$Nu = q' H' / \lambda \Delta T' = 1 / (T(A/2, 0) - T(A/2, 1)) \quad (8)$$

### 3. SOLUTION NUMERIQUE

Les équations gouvernantes sont résolues, numériquement, en utilisant la méthode des différences finies centrées dans un maillage régulier. L'intégration des équations de la vorticité et de l'énergie (Eqs. 1 et 2) est effectu e à l'aide de la méthode implicite des directions altern es (**ADI**). Pour satisfaire la conservation de la masse, l'équation de Poisson (Eq. 3) est trait e par la méthode de sur-relaxation successive par point (**PSOR**) avec un facteur de relaxation optimal calculé par la formule de Franckel [5]. Le choix de la grille de maillage dépend du rapport d'aspect, A, de la cavité et aussi de la nature de la solution. Des essais numériques ont été nécessaires pour optimiser le temps et la précision des calculs. Ainsi, une grille uniforme de 241×41 a été trouv e suffisante pour modéliser avec précision (les résultats de la solution analytique constituant la référence) les champs d'écoulement et de température dans une cavité de rapport d'aspect A = 12.

### 4. ANALYSE DE L'ECOULEMENT PARALLELE

Dans le cas d'une cavité allong e (A >> 1), chauff e à l'aide de flux uniformes, les champs de vitesse et de température deviennent respectivement parallèle et stratifié dans la région centrale de la cavité ([6]), ce qui se traduit par :

$$u(x, y) \approx u(y), v(x, y) \approx 0 \text{ et } T(x, y) = C x + \theta(y) \quad (9)$$

où la constante C n'est autre que le gradient horizontal de température. Moyennant une telle approximation, le système d'équations (1)-(6) devient :

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n_a-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right] = CRa \quad (10)$$

$$Cu = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (11)$$

$$u = \frac{\partial \theta}{\partial y} + 1 = 0 \text{ en } y = 0 \text{ et } 1 \quad (12)$$

A ces équations, s'ajoute la condition d'écoulement de retour (conservation de la matière) :

$$\int_0^1 u(y) dy = 0 \quad (13)$$

L'intégration des équations (10) et (11) associ es aux conditions (12) et (13), conduit aux expressions de la vitesse, de la température et du taux de transfert de chaleur recherch es. Cette intégration est complexe et

requiert un traitement numérique spécial. En effet, la non-linéarité du comportement et le changement du signe de gradient de vitesse dû à l'écoulement de retour, imposent que les expressions de la vitesse et de la température soient différentes selon que  $0 \leq y \leq y_0$ ,  $y_0 \leq y \leq y_1$  ou  $y_1 \leq y \leq 1$ , où  $y_0$  et  $y_1$  ( $y_1 = 1 - y_0$  à cause de la centrosymétrie de l'écoulement) sont telles que  $\partial u / \partial y = 0$  en  $y_0$  et en  $y_1$ . Elles correspondent donc aux positions transversales où la vitesse est extrémale, et elles sont obtenues à partir de l'équation (13) en combinant les méthodes itératives de Regula-Falsi et Wegstein et la méthode d'intégration de Gauss-Legendre. Pour simplifier les expressions des grandeurs recherchées, il est utile d'introduire la fonction  $f(y) = y^2/2 - y/2 + y_0 y_1/2$ . Ainsi, pour  $0 \leq y \leq y_0$ ,

$$u(y) = C^{1/n_0} Ra^{1/n_0} \left[ \int_0^y [f(y)]^{1/n_0} dy \right] \quad (14)$$

$$\theta(y) = C^{1+1/n_0} Ra^{1/n_0} \left[ \int_0^y \left[ \int_0^y [f(y)]^{1/n_0} dy \right] dy \right] - y + \theta(0) \quad (15)$$

pour  $y_0 \leq y \leq y_1$

$$u(y) = C^{1/n_0} Ra^{1/n_0} \left[ \int_0^{y_0} [f(y)]^{1/n_0} dy + \int_y^{y_0} [-f(y)]^{1/n_0} dy \right] \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \theta(y) = & C^{1+1/n_0} Ra^{1/n_0} \left[ \frac{(y-y_0)^2}{2} \int_0^{y_0} [f(y)]^{1/n_0} dy + \int_{y_0}^y \left[ \int_{y_0}^{y_0} [-f(y)]^{1/n_0} dy \right] dy \right] dy \\ & + (y-y_0) \int_0^{y_0} [f(y)]^{1/n_0} dy + \int_0^y \left[ \int_0^y [f(y)]^{1/n_0} dy \right] dy \right] - y + \theta(0) \end{aligned} \quad (17)$$

et pour  $y_1 \leq y \leq 1$

$$u(y) = C^{1/n_0} Ra^{1/n_0} \left[ \int_0^{y_0} [f(y)]^{1/n_0} dy + \int_{y_1}^{y_0} [-f(y)]^{1/n_0} dy + \int_{y_1}^y [f(y)]^{1/n_0} dy \right] \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \theta(y) = & C^{1+1/n_0} Ra^{1/n_0} \left[ \frac{1}{2} (y-y_0)^2 \int_0^{y_0} [f(y)]^{1/n_0} dy + \frac{1}{2} (y-y_1)^2 \int_{y_1}^{y_0} [-f(y)]^{1/n_0} dy \right. \\ & + \int_{y_1}^y \left[ \int_{y_1}^y [f(y)]^{1/n_0} dy \right] dy + \int_{y_0}^{y_1} \left[ \int_{y_0}^{y_0} [-f(y)]^{1/n_0} dy \right] dy \\ & + (y-y_0) \int_0^{y_0} [f(y)]^{1/n_0} dy + (y-y_1) \int_{y_0}^{y_1} [-f(y)]^{1/n_0} dy \\ & \left. + \int_0^y \left[ \int_0^y [f(y)]^{1/n_0} dy \right] dy \right] - y + \theta(0) \end{aligned} \quad (19)$$

La constante C est déterminée en intégrant l'équation (2), sur le volume de contrôle choisi arbitrairement dans la figure 1, en prenant en compte les conditions aux limites (6) et en raccordant avec la région de l'écoulement parallèle. La constante  $\theta(0)$ , elle, est obtenue en exploitant la symétrie centrale de l'écoulement. Soient :

$$C + a = \int_0^1 u(y) \theta(y) dy \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \theta(0) = & 1/2 - C^{1+1/n_0} Ra^{1/n_0} \left[ \frac{(1/2 - y_0)^2}{2} \int_0^{y_0} [f(y)]^{1/n_0} dy + \int_{y_0}^{1/2} \left[ \int_{y_0}^{y_0} [-f(y)]^{1/n_0} dy \right] dy \right] dy \\ & + (1/2 - y_0) \int_0^{y_0} [f(y)]^{1/n_0} dy + \int_0^{1/2} \left[ \int_0^y [f(y)]^{1/n_0} dy \right] dy \right] - CA/2 \end{aligned} \quad (21)$$

## 5. RESULTATS ET DISCUSSIONS

Le problème de convection naturelle au sein de la cavité considérée est gouverné par le rapport d'aspect, A, l'indice de comportement,  $n_0$ , le nombre de Prandtl, Pr, le nombre Rayleigh, Ra et la constante a donnant la proportion entre les flux de chaleur horizontal et vertical. Pour inclure les comportements pseudo-plastique ( $0 < n_0 < 1$ ), newtonien ( $n_0 = 1$ ) et dilatant ( $n_0 > 1$ ), on a affecté à  $n_0$  les valeurs respectives 0.6, 1 et 1.4. Pour les fluides non-newtoniens, les valeurs rencontrées pour Pr sont très élevées ce qui rend négligeable la contribution des termes convectifs dans l'équation (1). Par conséquent, la convection thermique devient insensible aux variations de ce paramètre pour les grandes valeurs de celui-ci. Aussi, les simulations numériques ont montré qu'à partir de  $A = 12$ , l'influence du confinement latéral ne se fait pas sentir et l'écoulement garde un

aspect parallèle et une stratification thermique dans la région centrale de la cavité, ce qui justifie, donc, le choix de cette valeur de  $A$ . Il en résulte que les paramètres de contrôle de l'étude sont  $n_0$  et  $Ra$ .

Des configurations d'écoulement et de température, obtenues numériquement pour  $a = 0.1$ ,  $Ra = 400$  et différentes valeur de  $n_0$ , sont présentées dans les figures 2 (état naturel) et 3 (état antinaturel). Comme on peut le voir, dans tous les cas étudiés, l'écoulement présente un aspect parallèle et une stratification thermique dans la région centrale de la cavité, ce qui prouve l'existence d'une solution analytique.

La figures 4 dans laquelle sont reportées les valeurs, numériques et analytiques, de l'intensité de courant,  $\Psi_c$ , et du nombre de Nusselt,  $Nu$ , en fonction de  $Ra$ , pour différentes valeurs de  $n_0$  et de  $a$ , montrent clairement l'excellent accord entre les deux solutions, ce qui témoigne de la validité de l'approximation de l'écoulement parallèle. Sur cette figure on voit aussi que le cas  $a = 0$  est particulier puisque la convection n'a pas lieu pour  $Ra \leq Ra_c$ . Cependant, pour  $Ra > Ra_c$ , deux mouvements convectifs en sens opposés sont possibles en plus du cas, trivial, de la conduction pure ( $\Psi_c = 0$ ). Pour  $a > 0$ , les courbes inférieures représentent les mouvements convectifs "naturels" tandis que les courbes supérieures correspondent au mouvement convectifs "antinaturels". Le cas "naturel" peut être obtenu en démarrant les calculs à partir de la conduction pure. Par contre pour atteindre le cas antinaturel, la solution obtenue avec  $a < 0$  doit être requise comme condition initiale. Aussi convient-il de mentionner que pour une valeur donnée de  $a$ , l'état "antinaturel" ne peut être atteint que si  $Ra > Ra_a$ . Ainsi,  $Ra_c$  et  $Ra_a$  représentent tous deux des nombres de Rayleigh critiques, c'est à dire des seuils au delà desquels des solutions multiples existent, le premier en l'absence de chauffage latéral et le second avec chauffage latéral. A ajouter qu'avec  $a < 0$  on peut obtenir l'image miroir par rapport à l'axe  $Ra$  des courbes relatives à  $\Psi_c$  obtenues pour  $a > 0$ . Toutefois, les courbes relatives à  $Nu$  restent indépendantes du signe de  $a$  aussi bien en "naturel" qu'en "antinaturel".

Pour ce qui est de l'influence de  $n_0$ , comme le montre les figures 4, une augmentation de ce paramètre conduit à une réduction de la convection thermique alors que sa diminution produit l'effet contraire. Il en résulte donc que, le comportement pseudo-plastique ( $0 < n_0 < 1$ ) favorise la convection alors que celui dilatant ( $n_0 > 1$ ) tend à la défavoriser.

## 6. CONCLUSION

L'étude de la convection naturelle dans une cavité rectangulaire horizontale allongée ( $A = 12$ ), chauffée horizontalement et verticalement et remplie d'un fluide non-Newtonien, a été entreprise numériquement et analytiquement. Un des objectifs essentiels de l'étude, qui consiste à prouver l'existence d'une solution analytique pour le présent problème et aussi la validation du code numérique, est atteint. Aussi, il est démontré que des solutions multiples sont possibles au delà d'un seuil. Enfin, l'effet de la rhéologie est tel que la convection thermique est favorisée par le comportement pseudo-plastique.

## 7. REFERENCES

- [1]. Ostrach, S., 1972, Natural convection in enclosures, *Advances in Heat Transfer*, Vol. 8, pp.161-227.
- [2]. Bejan, A., 1984, Convection heat transfer, John & Sons.
- [3]. Turki, S., 1990, Contribution à l'étude numérique des transferts par convection naturelle et par convection mixte dans les fluides non-Newtoniens confinés, Thèse de Doctorat, CNAM, Paris, France.
- [4]. Mamou, M., Vasseur, P. and Bilgen, E., 1996, Analytical and numerical study of double diffusive convection in a vertical enclosure, *Heat and Mass Transfer*, Vol. 32, pp. 115-125.
- [5]. Roache, P. J., 1982, Computational fluid dynamics, Hermosa Publishers, Albuquerque, New Mexico.
- [6]. Kimura, S., Vnnycky, M. et Alavyoon, 1995, Unicellular natural circulation in a shallow horizontal porous layer heated from below by a constant flux, *J. Fluid Mech.* 294, 231.

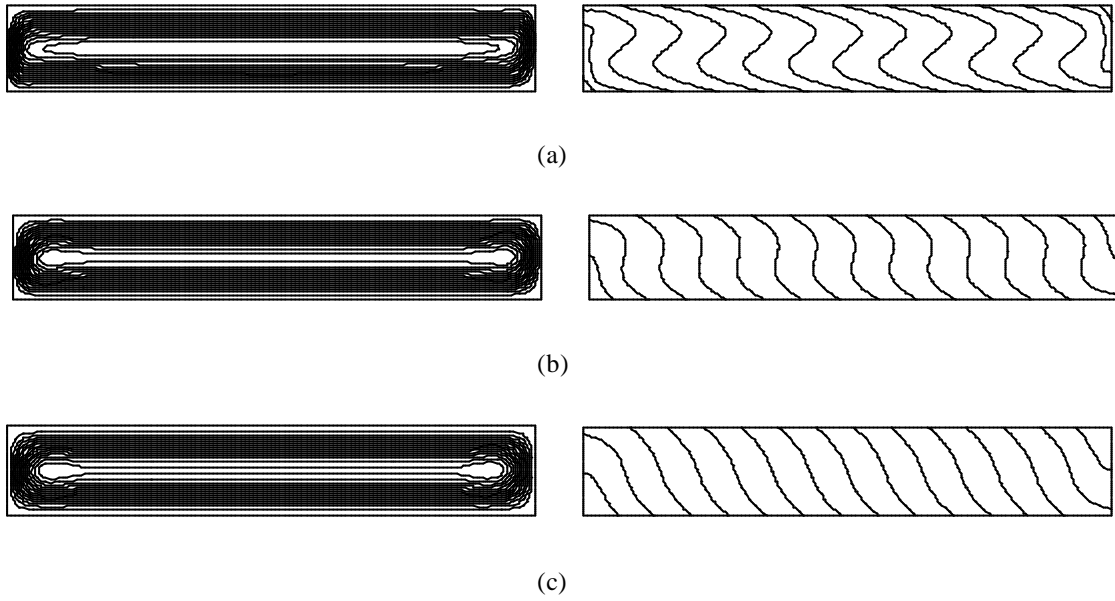


Fig. 2: Lignes de courant (à gauche) et isothermes (à droite) pour  $a=0.1$ ,  $Ra = 4000$  et différentes valeurs de  $n_0$  : (a)  $n_0 = 0.6$ ,  $\Psi_c = -10.662$  ; (b)  $n_0 = 1$ ,  $\Psi_c = -3.457$  et (c)  $n_0 = 1.4$ ,  $\Psi_c = -1.383$  (écoulement naturel).

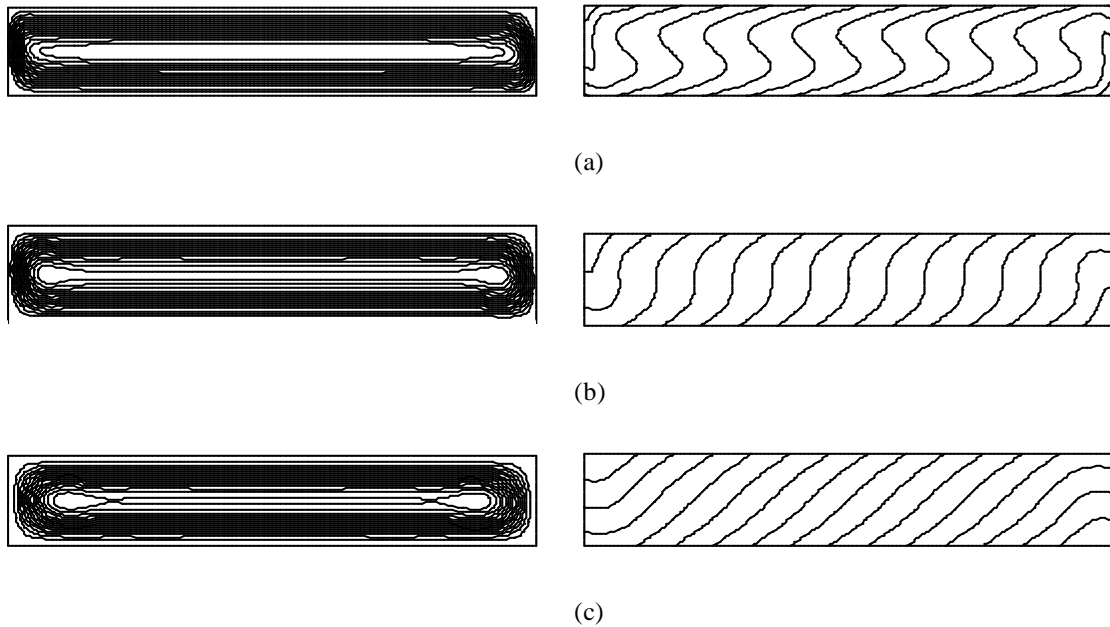


Fig. 3: Lignes de courant (à gauche) et isothermes (à droite) pour  $a=0.1$ ,  $Ra = 4000$  et différentes valeurs de  $n_0$  : (a)  $n_0 = 0.6$ ,  $\Psi_c = 10.450$  ; (b)  $n_0 = 1$ ,  $\Psi_c = 3.228$  et (c)  $n_0 = 1.4$ ,  $\Psi_c = 1.021$  (écoulement antinaturel).

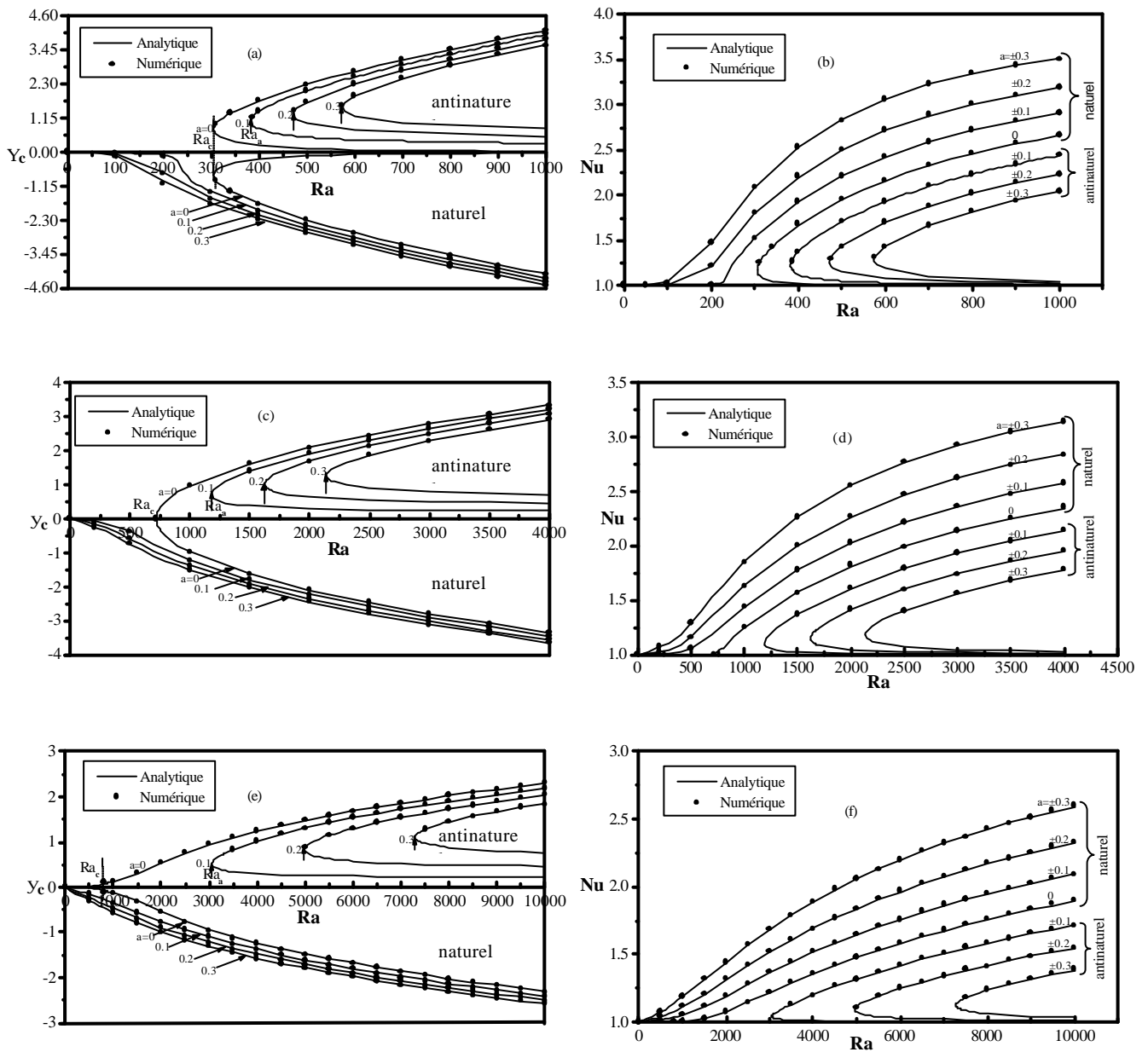


Fig. 4 : L'intensité d'écoulement (à gauche) et nombre de Nusselt (à droite) en fonction du nombre de Rayleigh  $Ra$  et de  $a$  pour différentes valeurs de  $n_0$  : (a), (b) :  $n_0 = 0.6$ , (c), (d) :  $n_0 = 1$  et (e), (f) :  $n_0 = 1.4$  ( $Ra_c$  et  $Ra_a$  sont des nombres de Rayleigh critiques).