

MODELISATION D'UN SYSTEME THERMIQUE PAR L'ANALYSE MODALE

Abid MAATALLAH ⁽¹⁾ et A.M. MOKHTARI ⁽²⁾

⁽¹⁾ Centre universitaire de béchar; E-mail: rassaily@yahoo.com

⁽²⁾ Université des sciences et de la technologie d'oran

Résumé.

Dans le cadre de la modélisation des systèmes thermiques linéaires et invariants, on présente ici la technique de l'analyse modale et de réduction de modèle. Cette technique consiste à représenter l'évolution thermique d'un système sur une base de fonction spatiales particuliers appelées « modes propres ». l'analyse spectrale permet d'acquérir des informations sur l'importances énergétique de chacun des propres et par la suite permet de réduire le modèle en retenant que les modes dominants. Cette méthodes est appliquée à un modèle bidimensionnel (d'ordre 100), décrivant la diffusion thermique au sein du pontet d'une culasse soumis à des condition aux limites très simplifié. Les simulation numériques montrent que le modèle réduit donne des résultats très satisfaisants.

Mots clés : Analyse modale, réduction spectrale, éléments propres, champ thermique, inertie thermique.

Nomenclature :

[C]	Matrice des capacités calorifiques (dim. N, N).
[A]	Matrice des échanges thermiques (dim. N, N).
[E]	Matrice de sollicitation (dim. N, p)
[J]	Matrice de dimension ($q \times N$) reliant les sorties $\{Y(t)\}$ au champ de température $\{T(t)\}$
[G]	Matrice instantanée, de dimensions ($q \times p$) qui traduit l'effet immédiat que certaines sollicitations peuvent avoir sur les sorties.
[P]	Matrice des modes propres (dim, N, N)
[F]	Matrice diagonale des valeurs propres (dim, N, N)
[B]	Matrice de commande du modèle détaillé (ou d'entrée).
[H]	Matrice reliant les mesures au champ des températures exprimé dans la base propre.
[S]	Matrice statique qui relie, en régime permanent les entrées $\{U_0\}$ aux sorties $\{Y(t)\}$ (dim, N, N)
$\{Q(t)\}$	Terme dynamique du champ des températures. (dim N)
$\{X(t)\}$	Vecteur d'état du modèle détaillé (dim N).
$\{Y(t)\}$	Vecteur mesure ou de sortie
$\{T(t)\}$	Vecteur des températures discrétisé (dim, N).
$\{U(t)\}$	Vecteur des sollicitations (dim, p)
N	Ordre du modèle détaillé à réduire (nombre de noeuds spatiaux)
n	Ordre du modèle réduit
P	nombre de sollicitations appliquées au système.

1. Introduction :

Face à des systèmes toujours plus complexes, représentés par un nombre croissant de variables et d'équations, les thermiciens recherchent des gains en temps d'exécution sans autant renoncer à la précision. Ceci devient même essentiel lorsqu'un modèle permettant le contrôle et la commande d'un processus est nécessaire. Des méthodes sophistiquées ont été développées pour réduire les modèles thermiques. Elles ont cependant l'inconvénient d'exiger un temps de calcul initial important. Nous présentons ici l'un des méthodes dites « modales » qui a la spécificité de projeter la représentation d'un système thermique dans son espace d'état modale. Dans cette méthodes, on effectue d'abord une troncature de la base modale en sélectionnant un faible nombre d'élément propres qualifiés de « dominants » et éventuellement dans une seconde phase, on améliore le modèle modal tronqué.

2. Le modèle physique :

La modélisation des systèmes thermiques régis par des équations aux dérivées partielles nécessite en général une discrétisation spatiale et les méthodes numériques habituellement utilisées (différences finies, éléments finis, etc...) conduisent alors à une représentation par un système de N équation différentielles du premier ordre en temps t :

$$[A].\{T(t)\} + [E].\{U(t)\} = [C].\{\dot{T}(t)\} \quad (2.1)$$

2. 1. Variable d'observation :

Dans la pratique, on peut s'intéresser à l'évolution de la température en certains points du système, mais il est rare, que l'on observe l'évolution du champ complet de température, alors on définit un nombre fini de variable d'observation".

Notons par $\{Y(t)\}$ le vecteur qui représente les seules q mesures ou sorties du système auxquelles on s'intéresse, il s'exprime généralement en fonction du champ discrétisés $\{T(t)\}$ et des sollicitations $\{U(t)\}$.

$$\{Y(t)\} = [J].\{T(t)\} + [G].\{U(t)\} \quad (2.2)$$

Notons que si la sortie est le champ complet des températures $\{T(t)\}$ alors $[J] = [I]$ et $[G] = [0]$. avec $[I]$ matrice d'identité.

3. Le modèle modale:

La formule (2.1) se prête bien à la mise sous forme des équations d'états classiquement utilisées en réduction de modèle, en projetant le terme dynamique du champ des températures dans la base propre [8]

$$\{Q(t)\} = [P]\{X(t)\} \quad (3.1)$$

La transformation de l'équation (2.1) fournit alors l'équation d'évolution des composantes $\{X(t)\}$

$$\{\dot{X}(t)\} = [F].\{X(t)\} + [B].\{\dot{U}(t)\} \quad (3.2)$$

avec :

$$[F] = [P]^{-1}[C]^{-1}[P] \quad (3.3)$$

$$[B] = [P]^{-1}[C][A]^{-1}[E] = [F]^{-1}[P]^{-1}[E] \quad (3.4)$$

Alors, l'équation (2.2) s'écrit :

$$\{Y(t)\} = [H]\{X(t)\} + [S]\{U(t)\} \quad (3.5)$$

3.1. Forme intégrée :

La matrice $[F]$ étant diagonale, les lignes de équation (3.2) sont découplées et l'évolution de chacune des variables d'état X_m est indépendante de celle des autres.

L'intégration formelle de équation (3.2), donne :

$$\{X(t)\} = [e^{Ft}].\left(\{X(0)\} + \int_0^t [e^{-FV}].[B].\{\dot{U}(V)\}dV\right) \quad (3.6)$$

avec:

$$\{X(0)\} = [P]^{-1}(\{T(0)\} - [S]\{U(0)\}) = [P]^{-1}[C]\{T(0)\} + [B]\{U(0)\}$$

Si l'on passe à l'expression de la qième mesure, en notant :

$$r_{qp}(m) = -\frac{H_{qm}B_{mp}}{S_{qp}} \quad (3.7)$$

alors l'équation (3.5) s'écrit:

$$Y_q(t) = \sum_{m=1}^N H_{qm}.e^{I_m t}.X_m(0) + \sum_{m=1}^N \sum_{p=1}^P S_{qp}r_{qp}(m).e^{I_m t} \int_0^t e^{-I_m V} \frac{dU_p(V)}{dV} dV + \sum_{p=1}^P S_{qp}U_p(t) \quad (3.8)$$

4. Réduction du modèle modale:

L'objectif est d'obtenir un modèle de faible dimension ($n \ll N$) avec une structure semblable à celle du modèle d'origine.

4.1. La méthode de troncature :

Toutes les méthodes de troncature [11] partent de la même idée pour la plupart des systèmes thermiques, seuls quelques modes propres sont importants pour la connaissance de leur comportement thermique relativement à un ensemble donné d'entrées et de sorties . Il est donc envisageable de limiter à la dynamique des seuls modes importants . Pour cela, on réorganise le modèle détaillé de façon à faire apparaître deux parties:

Une partie (*indice d*) associé aux modes importants (*ou dominants*)

Une deuxième partie (*indice f*) associée aux modes qui ne sont pas jugés importants (*ou faibles*).

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_d(t) \\ \dot{X}_f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_d & 0 \\ 0 & F_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_d(t) \\ X_f(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_d \\ B_f \end{bmatrix} \cdot \left\{ \dot{U}(t) \right\} \quad (4.2)$$

$$\{Y(t)\} = [H_d \quad H_f] \cdot \begin{bmatrix} X_d(t) \\ X_f(t) \end{bmatrix} + [S] \cdot \{U(t)\} \quad (4.3)$$

Le modèle réduit (tronqué) s'obtient alors en négligeant toute la partie indiquée en *f*.

5. Le système thermique étudié: pontet de la culasse :

5.1. Culasse réelle et son modèle :

La culasse d'un moteur diesel est une pièce d'une très grande complexité de forme. Le maillage rigoureux d'un tel volume exigerait un nombre de noeud tout à fait prohibitif. La première étape de la modélisation est donc " *l'idéalisation* " de la géométrie, qui consiste à simplifier les formes tout en respectant les caractéristiques principales du point de vue thermique (forme, aire et position relative des différentes surfaces d'échange).

La (figure 5.1) illustre la géométrie retenue pour le modèle. Celui -ci est composé :

- d'une plaque parallélépipédique.
- de deux pipes cylindriques.

En ce qui concerne les conditions aux limites de la culasse nous avons délibérément choisi d'utiliser des coefficients d'échange constante spatialement et des températures moyennes [3]

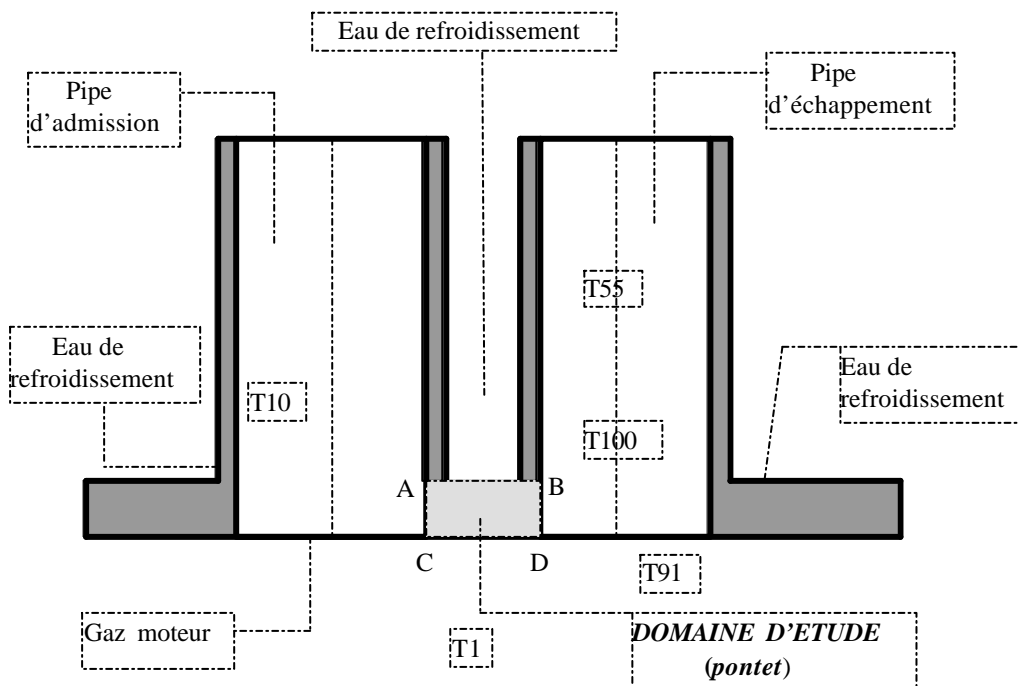


Figure 5.1: Modèle géométrique de la culasse et surfaces d'échange.

Le vecteur des entrées est : $U(t) = \{T_{gaz}, T_{eau}, T_{éch}, T_{adm.}\}^t$; prend respectivement comme valeurs moyenne, d'après [3], $U(t) = \{870^\circ\text{c}, 83^\circ\text{c}, 815^\circ\text{c}, 45^\circ\text{c}\}$

Par contre le vecteur de sortie est : $Y(t) = \{T_1, T_{10}, T_{55}, T_{91}, T_{100}\}^t$

Le modèle correspondant est alors mis sous la forme (2.1) et (2.2) puis sous la forme d'équation d'état (3.2) et (3.5).

5. 2. Recherche des éléments propres du système :

La résolution du problème homogène de l'équation (2.1) se ramène à la recherche des éléments propre de la matrice $C^{-1}A$.

La diagonalisation de la matrice $C^{-1}A$ (100 x 100) est effectuée en double précision et demande, sur un IBM 486 Aptiva 33 Mhz, un temps CPU de 1h 35mn 38.61s pour C_1 et 1h 33mn 16.96s pour C_2 . ; par contre sur un pentium/ le temps de calcul pour C_1 est de 9.77 s et pour C_2 est de 9.28 seconde.

On obtient ainsi une famille de 100 modes propres correspondant aux constantes de temps (tableau 5.2.1).

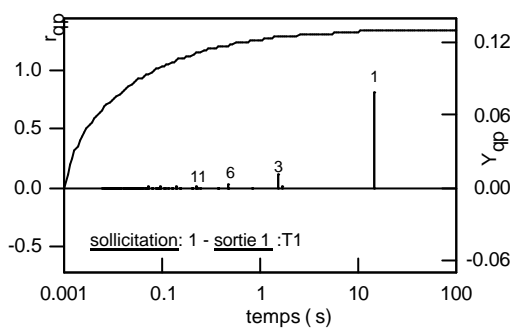
Tableau 5. 2.1 : constantes de temps propres (en s) des culasses C1 et C2.			
C1 (pontet en alliage d'aluminium)		C2 (pontet en fonte)	
N°	τ	N°	τ
1	14.3	1	25.2
2	1.65	2	4.69
3	1.47	3	3.79
4	0.823	4	2.29
5	0.471	5	1.44
6	0.454	6	1.33
7	0.366	7	1.09
8	0.366	8	1.08
9	0.235	9	0.711
10	0.223	10	0.695
11	0.220	11	0.669
12	0.197	12	0.601
13	0.196	13	0.599
14	0.151	14	0.466
15	0.151	15	0.464
16	0.134	16	0.420
17	0.133	17	0.413
18	0.124	18	0.385
19	0.124	19	0.384
20	0.111	20	0.345
28	0.837e-01	28	0.261
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
96	0.264e-01	96	0.834e-01
97	0.258e-01	97	0.816e-01
98	0.249e-01	98	0.786e-01
99	0.248e-01	99	0.786e-01
100	0.239e-01	100	0.757e-01

Remarque: Il est utile de rappeler que les constantes de temps définissent globalement le système, elle dépendent de sa configuration, des propriétés thermo physiques de ses constituants et de ses liaisons thermiques.

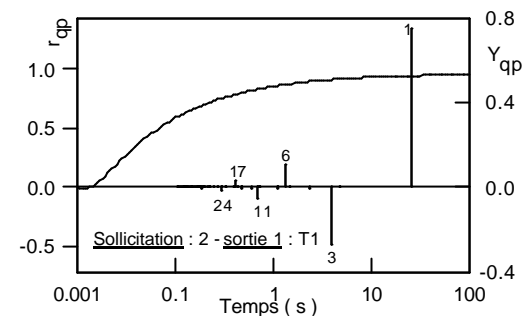
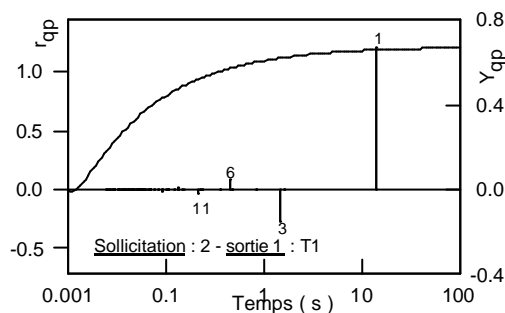
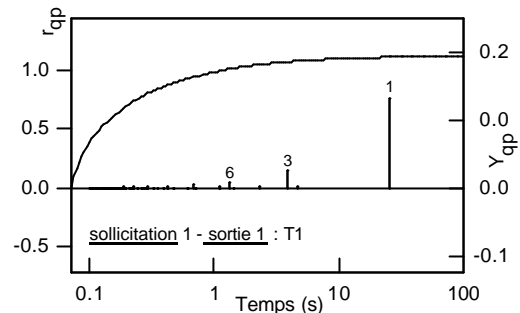
5. 3. Réponse à l'échelon :

Alors comme nous disposons quatre sollicitations et nous avons choisi cinq points à observer alors on doit tracer 4 x 5 spectres pour chaque couple (entrée - sortie) pour les deux type des culasses C_1 et C_2 .

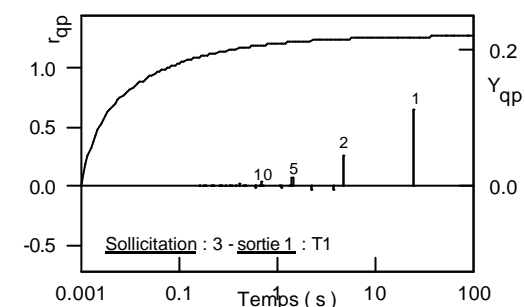
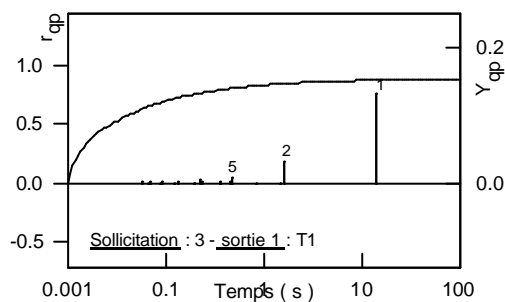
On représente à titre d'exemple sur la *figure 5.3-a et b*, le spectre et la courbe de réponse indicielle de la température T_1 pour chacune des quatre sollicitations retenus, on remarque :



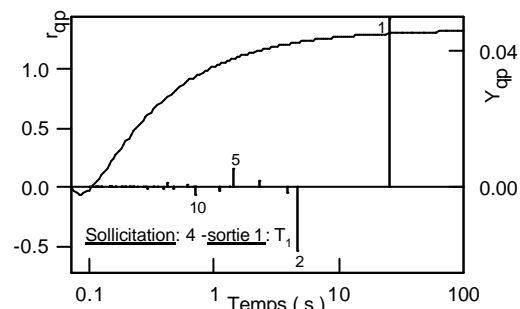
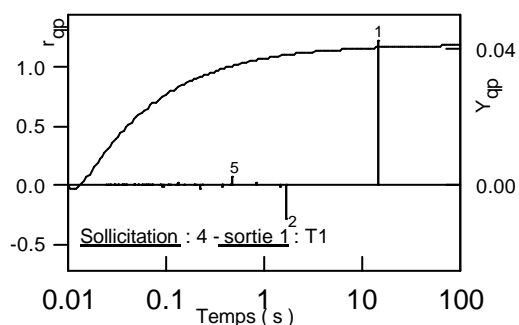
a) Sollicitation 1 : Température des gaz de combustion



b) Sollicitation 2 : Température de l'eau de refroidissement



c) Sollicitation 3 : Température des gaz d'échappement



d) Sollicitation 4 : Température de l'air d'admission

Fig. 5.3-a - Spectre et courbes de réponse de la température T_1 de la classe c1 aux quatre sollicitations .

Fig. 5.3-b - Spectres et courbes de réponse de la température T_1 de la classe c2 aux quatre sollicitations .

Le premier spectre (*figure 5.3-a, cas: a*) est non alterné et contient une raie significative celle du mode 1 et une raie faible celle du mode 3, ceci indique que le mode 1 contribue en grande partie dans la température T_1 lorsque la température des gaz de combustion varie. On peut donc retenir le mode 1 et 3 dans les modèles d'ordre réduit.

Le deuxième spectre (fig.5.3-a, cas: b), le couple (entrée-sortie) est défini par la température de l'eau de refroidissement et la température T_1 , ce spectre est alterné, non étalé. Les raies décroissent en fonction de leur ordre. On retiendra donc, en priorité, le mode 1, 3 puis le 6.

Le troisième spectre (fig.5.3-a, cas: c) correspondant au couple (Température des gaz d'échappement - T_1) est non alterné, on remarque toujours le mode 1 est dominant. On retiendra donc dans l'ordre le mode 1 ensuite 2.

La quatrième spectre (fig.5.3-a, cas: d), (Température de l'air d'admission- T_1) est un spectre alterné, on retiendra le mode 1 et 2.

L'observation de ces quatre spectre nous permet de sélectionner les modes à conserver pour un modèle réduit. A titre d'exemple, nous retenons les modes 1, 2 et 3.

5.3.1. Conclusion :

La constante de temps associée à la raie 1 de la culasse C_2 (dite raie principale) est supérieure à celle de la culasse C_1 . L'intuition des thermiciens est confirmée par la méthode modale à une culasse plus inerte correspond une plus grande constante de temps principale (voir tableau 5.2.1).

Les raies négatives indiquent en effet un phénomène de retard qui freine la transmission du signal du point d'excitation au point d'observation; ce retard est plus ou moins prononcé (raies négatives plus ou moins grandes) selon l'aptitude des milieux intermédiaires à conduire et à stocker l'énergie thermique.

La constante de temps principale, étant le paramètre dynamique le plus influent, pouvait caractériser simplement, moyennement certaines précautions, l'inertie thermique .

On se souviendra que la différence d'inertie entre les deux culasses s'est manifesté dans les réponses à échelon par un changement d'échelle du temps (réponse plus rapide pour C_1 que pour C_2)

Tableau 5.2.2: Tableau comparatif des caractéristiques thermo physiques des différents matériaux classiques utilisés dans les moteurs [2].

Type de culasse	composition	conductivité thermique (W/m.°K)	chaleur spécifique (J/Kg.°K)	masse volumique (Kg//m ³)
C1	Alliage d'aluminium	117	900	2700
C2	Fonte	50	450	7300

Tableau 5.2.4 : TEMPS CPU en seconde (IBM 486 Aptiva 33 Mhz)

SORTIE	Modes retenus		Modèle tronqué		Modèle pondéré		Modèle complet	
	pour C1	pour C2	cas: C1	cas: C2	cas: C1	cas: C2	cas: C1	cas: C2
T_1	1; 2; 3	1; 2; 3	4.17	4.06	7.19	7.14	107.54	97.76
T_{10}	1; 2; 3	1; 2	4.11	3.29	7.19	6.31	107.43	97.54
T_{55}	1; 5; 6	1; 5; 6	4.11	4.11	7.25	7.08	107.48	97.54
T_{91}	1; 2	1; 2; 3	3.35	4.06	6.48	7.08	107.43	97.54
T_{100}	1; 2	1; 2; 3	3.35	4.06	6.37	7.08	107.37	97.54
T_5	1; 2	1; 2; 6	3.40	4.06	6.42	7.14	107.37	97.60
T_{51}	1; 3; 5	1; 3	4.11	3.35	7.19	6.37	107.48	97.60

5.4. Représentation des modes propres :

Les modes propres sont des fonctions de l'espace et nous pouvons les représenter sous forme de thermogrammes topologiques. Leur observations permet de mieux comprendre à quoi correspond chacun d'entre eux. Nous donnons simplement à titre d'exemple l'allure des 6 premier modes propres pour C_1 ainsi que les constantes de temps associées.

Le mode 1 donne l'échelle des temps pour les évolutions globales ($t_1 = 14.3$ s pour C_1 et $t_1 = 25.2$ s pour C_2). C'est ce mode qui intervient dans la phase finale de refroidissement complet du système. L'analyse physique des modes révèle la nature spatiale de l'inertie thermique.

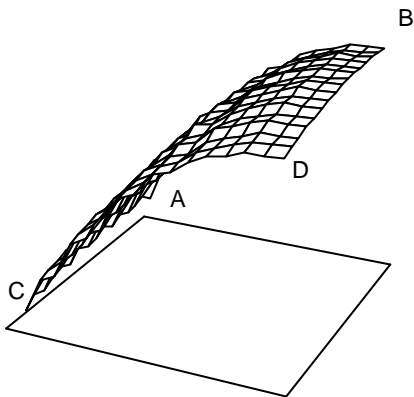


Figure 4-1 : **Mode propre : 1 (c1)**
Temps propre : 14.3 s

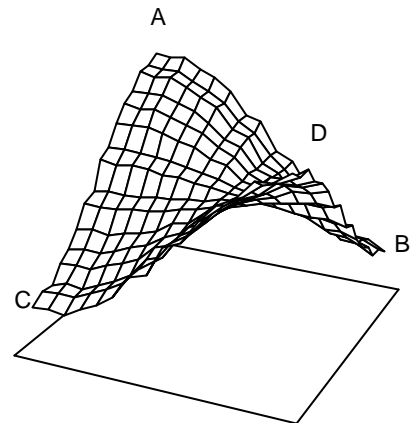


Figure 4-4 : **Mode propre : 4 (c1)**
Temps propre : 0.823 s

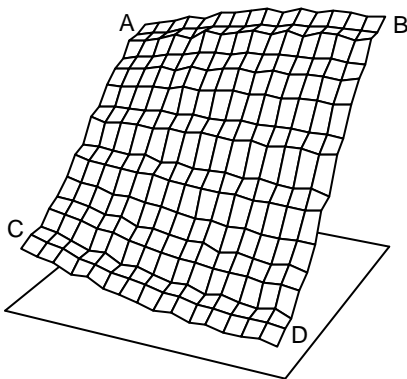


Figure 4-2 : **Mode propre : 2 (c1)**
Temps propre : 1.65 s

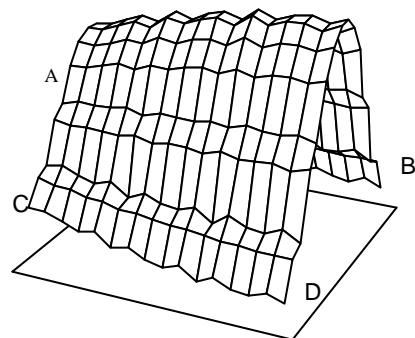


Figure 4-5 : **Mode propre : 5 (c1)**
Temps propre : 0.471 s

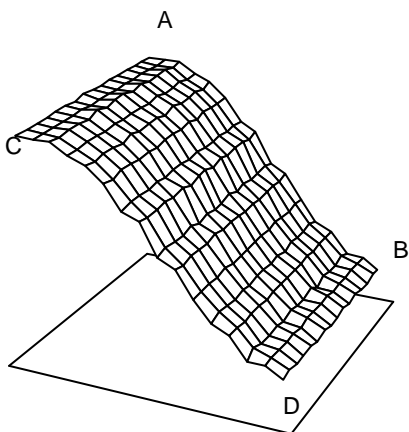


Figure 4-3 : **Mode propre : 3 (c1)**
Temps propre : 1.47 s

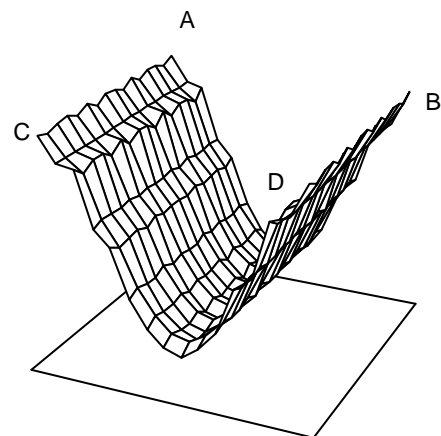


Figure 4-6 : **Mode propre : 6 (c1)**
Temps propre : 0.454 s

6. Simulation et comparaison des modèles:

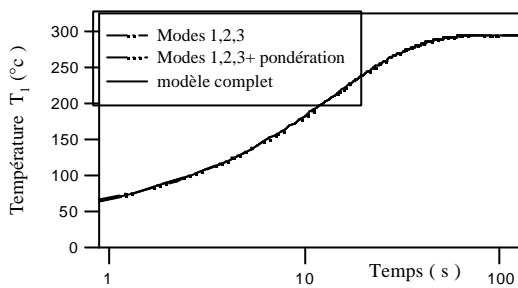


Figure 5.1-a : (cas: C1)

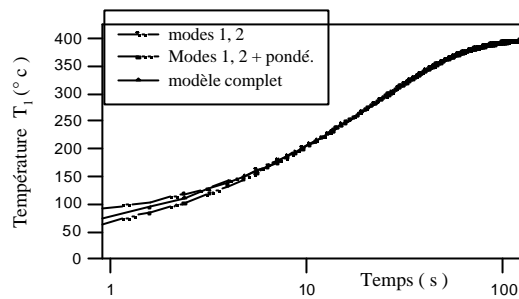


Figure 5.1.b : (cas: C2)

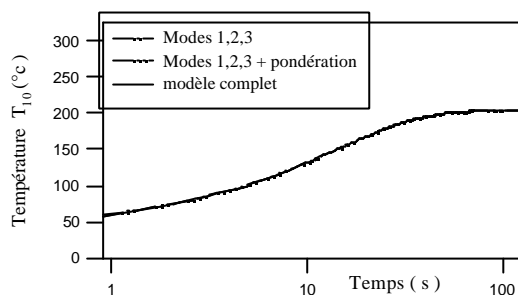


Figure 5.2-a : (cas: C1)

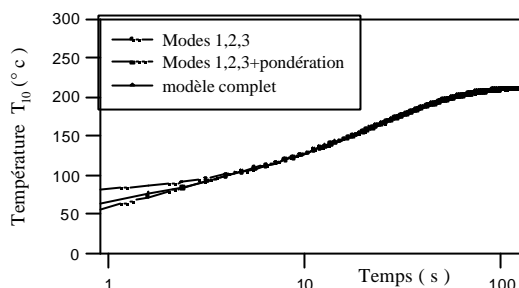


Figure 5.2-b : (cas: C2)

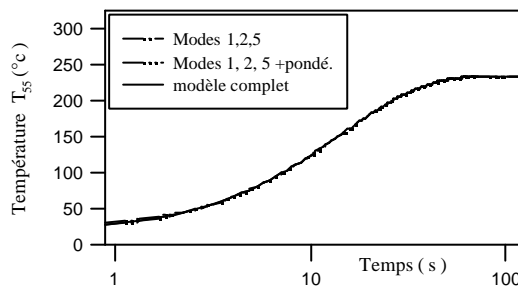


Figure 5.3-a : (cas: C1)

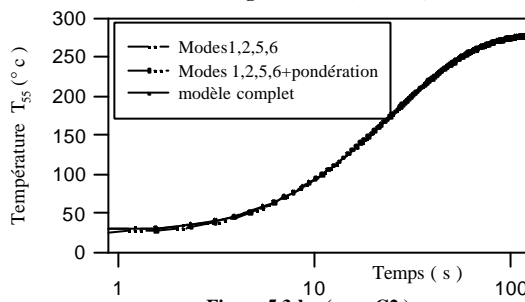


Figure 5.3-b : (cas: C2)

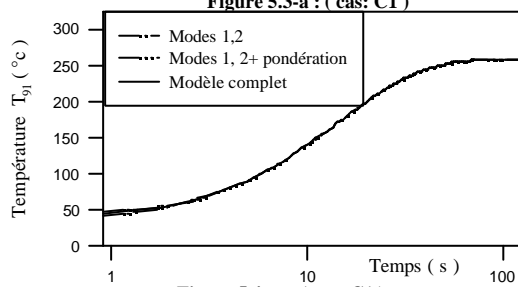


Figure 5.4-a : (cas: C1)

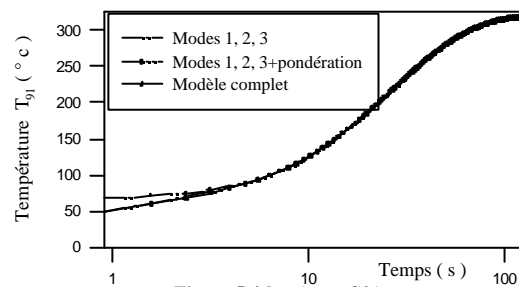


Figure 5.4-b : (cas: C2)

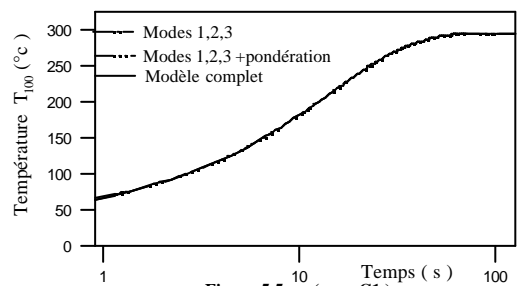


Figure 5.5-a : (cas: C1)

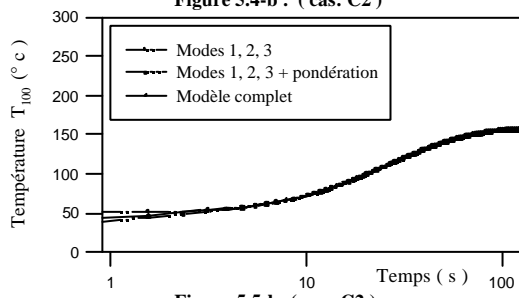


Figure 5.5-b : (cas: C2)

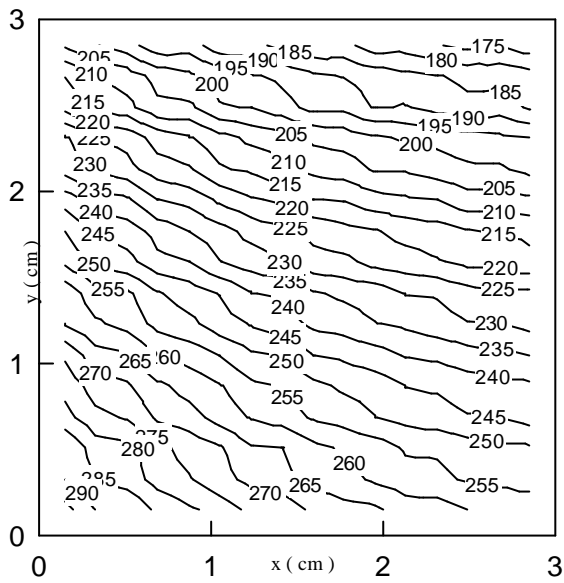


Figure 6.1-a : Isothermes en régime permanent (cas: C1)

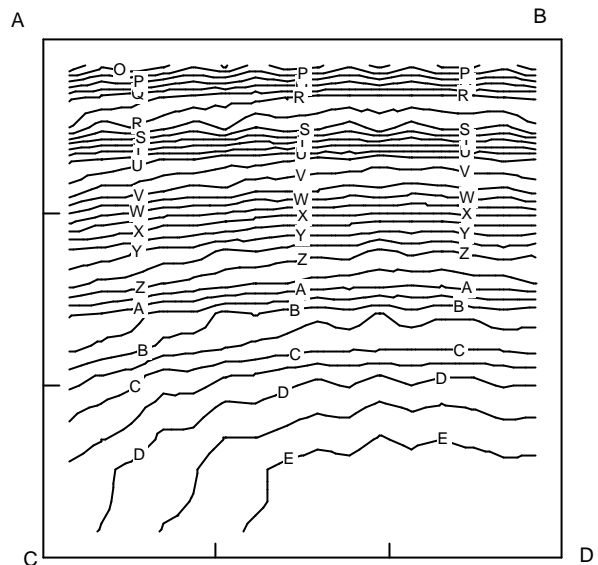


Figure 6.1-b: Mode propre 1 (cas C1); isovaleur maximale = 0.026
écart entre deux isovaleurs = $0.2 \cdot 10^{-3}$

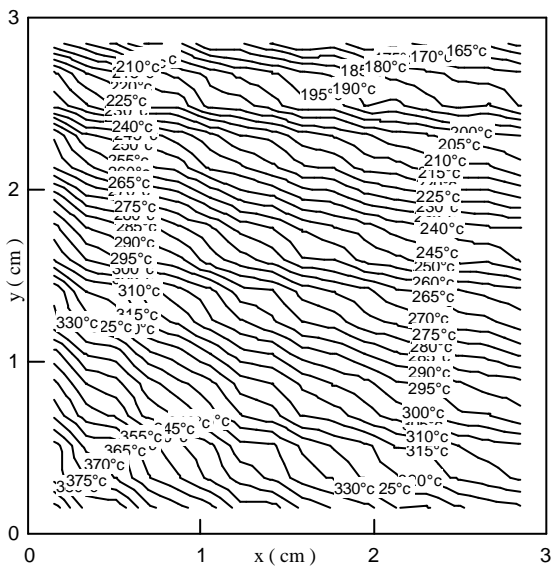


Figure 6.2-a : Isothermes en régime permanent (cas : C2)

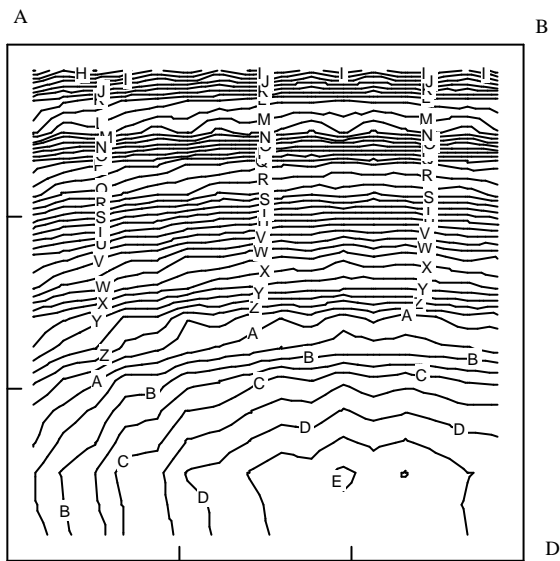


Figure 6.2-b: Mode propre 1 (cas: C2); isovaleur max A = 0.02,
écart entre deux isovaleurs = $0.2 \cdot 10^{-3}$

5. 6. Conclusion :

On constate que pour le cas C_1 tous les points observés atteignent plus vite la nouvelle état d'équilibre que ceux de C_2 c'est à dire ces derniers atteignent l'équilibre avec un retard d'environ 10s par rapport au points du cas C_1 .

De plus on voit clairement que les températures observés dans le 'pontet' tendent vers l'équilibre (régime permanent) à partir du temps supérieur à $3\tau_1$ pour les deux types de culasse (τ_1 , temps principale du système)

On remarque que les éléments propres dépendent de la configuration du système, des propriétés thermo physiques et des liaisons thermiques, mais pas de la sollicitation ni de la sortie envisagée.

Enfin les modes associés aux plus grands temps caractéristiques traduisent généralement bien la répartition de l'énergie sur l'ensemble du système. Leurs formes se rapprochent de celles des régimes permanents.

On montre sur cette exemple la puissance de la représentation modale et les fortes possibilités de la réduction qu'elle offre .

Références bibliographiques :

- [1] D.Petit, R.Pasquetti. Réduction de modèle par identification de modes dominants, application à un modèle bidimensionnel de diffusion thermique. Revue de physique appliquée. Vol 29,599-617,Août 1990.
- [2] A.D. Gosman, B.E. Launder, F.C. Lockwood, G.J.Reece, A.C.A.L. Course in fluid mechanics and heat transfert, presented at computers in Higher education Conference, Loughborough, March 1976 .
- [3] Hai Wu and Robert A.Knapp. A Heat Transfer Analysis of Automotive .Internal Combustion Gasoline Engines .1981. Numerical Methods in Heat Transfer, Edited by R.W. Lewis, K. Morgan, and O. C. Zienkiewicz; (page 511 ÷ 521).
- [4] R.Chuimert, M.Garat. Choix d'alliages d'aluminium de moulage pour culasses diesel fortement sollicitées. Article 1990.
- [5] M.BIDAULT, G.DESPLANCHES,H.KOLOWSKI. Utilisation des céramiques dans les moteurs diesel de véhicules industriels. Conférence G.F.C.Paris 3et4 octobre 1984.
- [6] G.WOSCHNI. A uiversally applicable equation for the instantaneous Heat transfert coefficient in the internal combustion engine. SAE TRANSACTION, paper 670931,Pittsburgh.
- [7] GIRAUD Olivier, Contribution à l'étude de l'isolation thermique d'un moteur suralimenté à allumage par compression. Thèse de Docteur de 3è Cycle, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6, 1984.
- [8] G.Lefebvre. Analyse et réduction modales d'un modèle de comportement thermique de bâtiment. Thèse de Doctorat . Université Paris 6, 1987.
- [9] . MAATALLAH, Analyse et réduction modale appliquée à la modélisation du champ thermique dans une culasse d'un moteur diesel. Thèse de Magister, U.S.T.O. 2001.
- [10] A.M.Mokhtari. Etude du comportement thermique des bâtiments en contact avec le sol par l'analyse modale. Thèse de Doctorat , INSA , Lyon. 1988.
- [11] J.J. Salgon, Analyse Modale par Dis crétisation Spatiale, Application à la Modélisation des ponts Thermiques dans le bâtiment. Thèse de Doctorat, Université Paris(6),1987.
- [12] M. Philippe ETIENNE, Modélisation tridimensionnelle stationnaire du champ thermique d'un moteur diesel . Thèse de doctorat de l'université Paris 6 , 1989 .