

ETUDE DE LA TRANSITION ENTRE LES REGIMES LAMINAIRE ET TURBULENT LORS DE L'EVAPORATION D'UN FILM LIQUIDE RUISSELANT AROUND DE LA PAROI EXTERNE D'UNE ELLIPSE HORIZONTALE

M. Asbik¹, O. Ansari¹ et B. Zeghmati²

¹ UFR de Modélisation en Exploitation Rationnelle des Ressources Naturelles,
Faculté des Sciences et Techniques, B. P. 509 Boutalamine, Errachidia, Maroc.
m.asbik@caramail.com

² Centre d'Etudes Fondamentales -Groupe de Mécanique Acoustique et Instrumentation
(G.M.A.I.-C.E.F.), EA 2986 Université de Perpignan, 52, avenue de Villeneuve
66860 Perpignan cedex, France.
00 33 468661771 ; zeghmati@univ-perp.fr

Résumé - Une étude numérique de la transition entre les régimes laminaire et turbulent, lors de l'évaporation d'un film d'eau ruisselant autour de la paroi externe d'une ellipse horizontale est présentée. Le film liquide s'écoule sous l'effet de la gravité, des gradients de pression et des forces de frottement visqueux. A l'interface liquide-vapeur, la contrainte de cisaillement est supposée négligeable. Les termes d'inertie et de convection d'enthalpie sont retenus et le modèle de turbulence de Von Karman est utilisé. Les équations régissant ce phénomène sont discrétisées à l'aide du schéma implicite aux différences finies développé par Keller. L'influence du débit massique par unité de longueur, du nombre de Froude et de l'excentricité de l'ellipse sur le phénomène de transition est analysée.

Mots clés : transition Evaporation, film liquide, régime laminaire, régime turbulent, différences finies

1. INTRODUCTION

Dans une couche limite, la transition entre les régimes laminaire et turbulent de l'écoulement d'un fluide se déroule dans une zone, assimilée généralement à un point (ou à un intervalle) pour des raisons de simplification. En écoulement diphasique (condensation, évaporation), les travaux portant sur la transition entre les régimes laminaire et turbulent de l'écoulement d'un film descendant qui ruisselle le long d'une paroi, sont peu répandues [1, 6]. La vitesse de l'écoulement de la vapeur a une influence non négligeable sur l'évaporation et par conséquent sur les transferts thermiques. Elle peut entraîner l'apparition des phénomènes difficiles à maîtriser, notamment le phénomène d'assèchement et la naissance de vagues bidimensionnelles ou tridimensionnelles au niveau de la surface du film liquide.

Dans cet article, nous analysons la transition entre les régimes laminaire et turbulent, lors de l'évaporation en convection forcée d'un film liquide ruisselant sur la paroi externe d'une ellipse horizontale. L'influence de différents paramètres tels que : le débit massique par unité de longueur, le nombre de Froude et l'excentricité de l'ellipse sur la transition entre les régimes laminaire et turbulent, est analysée.

2. FORMULATION DU PROBLEME

2.1 Modèle physique

Considérons une ellipse horizontale de longueur infinie (figure 1), placée dans un écoulement d'un liquide pur (eau) qui s'écoule sous la forme d'un jet libre de débit uniforme et constant. Le film liquide ruisselle sous l'effet de la gravité, des différents gradients de pression et des forces de frottement visqueux. Il s'évapore sur la paroi de l'ellipse, maintenue à une température supérieure à la température de la vapeur qui s'écoule au voisinage de la phase liquide en convection forcée. Un système de coordonnées curvilignes (x^*, y^*) est associé à cette ellipse.

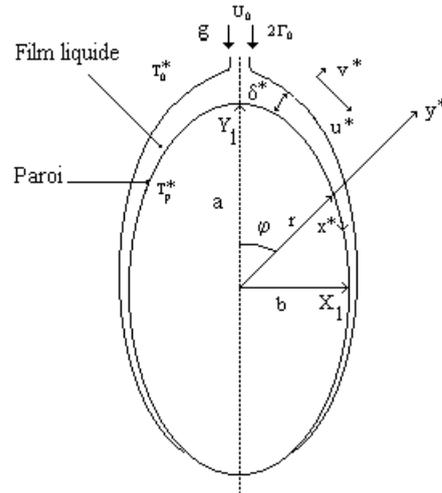


Figure 1. Modèle physique et système de coordonnées.

2.2 Hypothèses simplificatrices

- Les écoulements et les transferts de chaleur dans les deux phases sont bidimensionnels.
- Les propriétés thermophysiques sont constantes.
- Les fluides sont incompressibles.
- A l'extérieur de la couche limite, l'écoulement est supposé potentiel.
- L'interface liquide-vapeur est en équilibre thermodynamique et la contrainte de cisaillement est y supposée négligeable.
- L'interface liquide-vapeur est supposée sans ondulation et l'écoulement de la vapeur à l'extérieur de la couche liquide s'effectue sans arrachement de gouttelettes de liquide.
- L'épaisseur du film liquide est négligeable devant le rayon de courbure.

2.3 Equations de transfert

Les transferts sont régis par les équations classiques d'un film liquide ruisselant sur une paroi. Dans l'équation de la quantité de mouvement, les gradients de pression sont dus à l'écoulement potentiel, à la courbure et/ou à la tension superficielle. Ces gradients obéissent aux relations suivantes :

$$\frac{dP_e}{dx^*} = -\mathbf{r}_v u_e^* \frac{du_e^*}{dx^*}, \quad \frac{dP_c}{dx^*} = \mathbf{s} \frac{d}{dx^*} \left(\frac{1}{R(\mathbf{q})} \right) \quad (1)$$

A l'extérieur de la couche limite la vitesse de l'écoulement et le rayon de courbure s'expriment respectivement par :

$$u_e^* = U_0(1+e) \frac{\sin(\mathbf{q})}{\sqrt{\sin^2(\mathbf{q}) + e^2 \cos^2(\mathbf{q})}}, \quad R(\mathbf{q}) = \frac{a}{e} \sqrt{[\sin^2(\mathbf{q}) + e^2 \cos^2(\mathbf{q})]^3} \quad (2)$$

\mathbf{r}_v et \mathbf{s} représentent la masse volumique de la vapeur et la tension superficielle.

Nous avons choisi le modèle de turbulence de Von Karman [3] et défini la variable interne de paroi y^+ , la vitesse de frottement U_t et la conductivité λ_t par :

$$y^+ = \mathbf{r}_\ell \frac{U_t y^*}{\mathbf{m}}, \quad U_t = \left[\frac{\mathbf{t}_w}{\mathbf{r}_\ell} \right]^{1/2}, \quad \lambda_t = \frac{C_p \mu_t}{Pr_t} \quad (3a-b)$$

2.4 Equations sans dimensions

Les équations qui régissent les transferts dans la phase liquide et les conditions aux limites qui leurs sont associées sont adimensionnalisées à l'aide des variables sans dimensions suivantes :

$$x = \frac{x^*}{d}, \quad y = \frac{y^*}{d} Re^{1/2}, \quad U = \frac{u^*}{U_0}, \quad V = \frac{v^*}{U_0} Re^{1/2}$$

$$T = \frac{(T^* - T_0^*)}{\Delta T}, \quad \Delta T = T_p^* - T_0^*, \quad \mathbf{d} = \frac{\mathbf{d}^*}{d} Re^{1/2} \quad (4a-f)$$

Afin de mieux repérer l'interface liquide-vapeur, nous procédons au changement de repère à l'aide de la transformation suivante :

$$X = x, \quad \mathbf{h} = \frac{y}{\mathbf{d}} \quad (5a-b)$$

Dans ce repère, les équations adimensionnelles et les conditions aux limites s'écrivent:

Equation de continuité

$$\mathbf{d} \frac{\mathcal{U}}{\mathcal{X}} - \mathbf{h} \frac{d\mathbf{d}}{dX} \frac{\mathcal{U}}{\mathcal{h}} + \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{h}} = 0 \quad (6)$$

Equation de mouvement

$$U \left\{ \frac{\mathcal{U}}{\mathcal{X}} - \frac{\mathbf{h} d\mathbf{d}}{\mathbf{d} dX} \frac{\mathcal{U}}{\mathcal{h}} \right\} + \frac{V}{\mathbf{d}} \frac{\mathcal{U}}{\mathcal{h}} = G(\mathbf{q}) + \frac{1}{\mathbf{d}^2} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{h}} \left(b_U \frac{\mathcal{U}}{\mathcal{h}} \right) \quad (7)$$

avec :

$$\frac{tg(\mathbf{j})}{tg(\mathbf{q})} = e \quad \text{et} \quad G(\mathbf{q}) = \frac{\sin(\mathbf{j})}{Fr} + \frac{\mathbf{r}_v}{\mathbf{r}_l} u_e \frac{du_e}{dX} + \frac{3}{2} \frac{1}{Bo Fr} e(1+e)^2(1-e^2) \frac{\sin(2\mathbf{q})}{[\sin^2(\mathbf{q}) + \cos^2(\mathbf{q})]^3}$$

Equation de la chaleur

$$U \left\{ \frac{\partial T}{\partial X} - \frac{\eta}{\delta} \frac{d\delta}{dX} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right\} + \frac{V}{\delta} \frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{1}{Pr} \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(b_t \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \quad (8)$$

avec :

$$Re = \mathbf{r}_l \frac{U_0 d}{\mathbf{m}}, \quad Fr = \frac{U_0^2}{gd}, \quad Pr = \frac{\mathbf{m} Cp}{\mathbf{l}_l}, \quad b_U = 1 + \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{m}_t}, \quad b_T = 1 + \frac{\mathbf{l}_l}{\mathbf{l}_t} \quad (9a-e)$$

Conditions aux limites

- A la paroi $\eta = 0$, $U = V = 0$, $T = 1$ (10a-c)

- A l'interface liquide-vapeur $\eta = 1$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \mathbf{h}} \right|_{\mathbf{h}=1} = 0, \quad T = 0 \quad (11a-b)$$

Bilan thermique

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \mathbf{h}} \right|_0 = \mathbf{d} \frac{Pr}{Ja} \frac{d}{dX} \left[\mathbf{d} \int_0^1 \left\{ 1 + Ja \left(T + 2 \frac{T_0^*}{\Delta T} \right) \right\} U d\mathbf{h} \right] \quad (12)$$

3. EQUATIONS TRANSFORMEES

Les équations de mouvement (7) et de la chaleur (8) sont transformées en un système d'équations différentielles du premier ordre :

$$\begin{cases} \alpha_1 \left[U \frac{\partial f}{\partial X} \right] + \alpha_2 [U\omega] + \alpha_3 [\omega] + \alpha_4 [(b_\xi \omega)] = \alpha_5 \\ \omega = \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{cases} \quad (13a-b)$$

où $f = (U \text{ ou } T)$, prime $''$ dénote la dérivée par rapport à \mathbf{h} et les autres paramètres de l'équation (13a) sont récapitulés dans le tableau ci-dessous :

	f	\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	α_3	α_4	α_5	\mathbf{x}
Equ. (7)	U	δ^2	$-\delta\eta \frac{d\delta}{dX}$	δV	-1	$\delta^2 G(\theta)$	U
Equ. (8)	T	$Pr\delta^2$	$-Pr\delta\eta \frac{d\delta}{dX}$	$Pr\delta V$	-1	0	T

Tableau 1 : Expression des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ et α_5 .

Les conditions aux limites sont les mêmes que celles citées ci-dessus (10-11).

4. SCHEMA NUMERIQUE ET PROCEDURE DE CALCUL

En raison de la décroissance (resp. croissance) rapide de l'épaisseur du film liquide au voisinage du point d'arrêt (resp. au voisinage de $X = \pi$), nous avons utilisé dans la direction X un maillage irrégulier dont les nœuds sont très rapprochés en haut et en bas de la paroi elliptique. Dans la direction η , le maillage est considéré uniforme. Les équations (13a-b) sont discrétisées à l'aide du schéma implicite aux différences finies développé par Keller [4] et la linéarisation des équations est assurée par la méthode de Newton. Les systèmes d'équations algébriques ainsi obtenus, sont formulés sous la forme d'une matrice de type tridiagonale par blocs et résolus par l'algorithme de Thomas. Pour le démarrage du calcul, les vitesses (U) et les températures (T) sont obtenus en négligeant les termes d'inertie et de convection d'enthalpie. Les calculs sont ensuite effectués pour une valeur arbitraire de l'épaisseur du film liquide. La continuité de la densité du flux de chaleur à l'interface liquide-vapeur est assurée par un calcul itératif entre la valeur attribuée à l'épaisseur du film liquide (δ) et celle calculée à l'aide de la méthode de la sécante. La procédure itérative se poursuit jusqu'à ce que l'erreur relative déduite de ces deux valeurs soit inférieure à 10^{-8} . La convergence est obtenue après quatre à cinq itérations.

5. RESULTATS

Les calculs ont été effectués en considérant un film d'eau qui s'évapore sur la paroi externe d'une ellipse horizontale de diamètre équivalent $d = a(1+e) = 30\text{mm}$. Nous avons affecté au nombre de Prandtl turbulent la valeur 0.9. A une position angulaire fixée, le début de la transition entre les régimes laminaire et turbulent de l'écoulement du film liquide est localisé à l'ordonnée \mathbf{h}_ζ correspondant à l'épaisseur de la sous-couche laminaire ($y^+ = 5$) [3] en se déplaçant de la paroi vers le fluide libre. Notons que si $\mathbf{h}_\zeta < 1$ dans une région de l'écoulement alors celle-ci est une couche de transition voire de la turbulence développée, tandis que lorsque $\mathbf{h}_\zeta = 1$ signifie que le régime d'écoulement du film liquide est dans le domaine considéré complètement laminaire.

Au voisinage du point d'arrêt l'épaisseur \mathbf{h}_ζ est d'autant plus faible (*sous-couche laminaire faible*) que le débit massique par unité de longueur est élevé (figures 2a-b). L'ordonnée \mathbf{h}_ζ diminue rapidement jusqu'à atteindre un minimum pour subir ensuite une augmentation rapide. Cette évolution s'explique par une augmentation brutale de la vitesse de frottement U_τ qui provoque, une diminution considérable de la longueur caractéristique de la région de la paroi interne $L_c = \frac{\nu}{U_\tau}$ (longueur visqueuse). Ainsi, puisque nous avons $\left[y_{\max}^+ = y^+(\eta = 1) \right] < 30$, la zone qui correspond à $\mathbf{h}_\zeta < 1$ est une zone de transition (figure 2a). Celle-ci est repérée par l'angle paramétrique $\theta = 0^\circ$ (début de transition : $\eta_5 < 1$) et $\theta = \theta_{ft1}$ (fin de transition : $\eta_5 = 1$). La position angulaire θ_{ft1} localisant la fin de la première transition s'éloigne du point d'arrêt au fur et à mesure que le débit massique par unité de longueur augmente ($\theta_{ft1} \approx 3^\circ, 6^\circ, 15^\circ, 20^\circ$ et 75° respectivement pour $\Gamma_0 = 5 \cdot 10^{-3}, 8 \cdot 10^{-3}, 14 \cdot 10^{-3}, 16 \cdot 10^{-3}$ et $20 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$). D'autre part, à partir de la position angulaire θ_{ft1} le régime devient laminaire jusqu'à la position

$\theta = \pi$ pour les valeurs du débit massique par unité de longueur égales à $\Gamma_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$, $8 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ et $14 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ (figure 2a). Quant aux courbes représentant les valeurs du débit massique par unité de longueur $\Gamma_0 = 16 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ et $20 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ nous remarquons l'existence d'une double transition caractérisée par un premier intervalle de transition compris entre 0° et θ_{ft1} , au-delà duquel le régime devient laminaire jusqu'à une position angulaire θ_{ft2} qui caractérise le début d'une seconde transition entre les régimes laminaire et turbulent ($\theta_{ft2} \approx 172^\circ$, 135° respectivement pour $\Gamma_0 = 16 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ et $20 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$) qui permet du nouveau le passage du régime laminaire à celui de la transition. En augmentant le débit massique d'eau par unité de longueur, on remarque que la position angulaire θ_{ft2} se déplace vers celle (θ_{ft1}) caractérisant la disparition du régime laminaire.

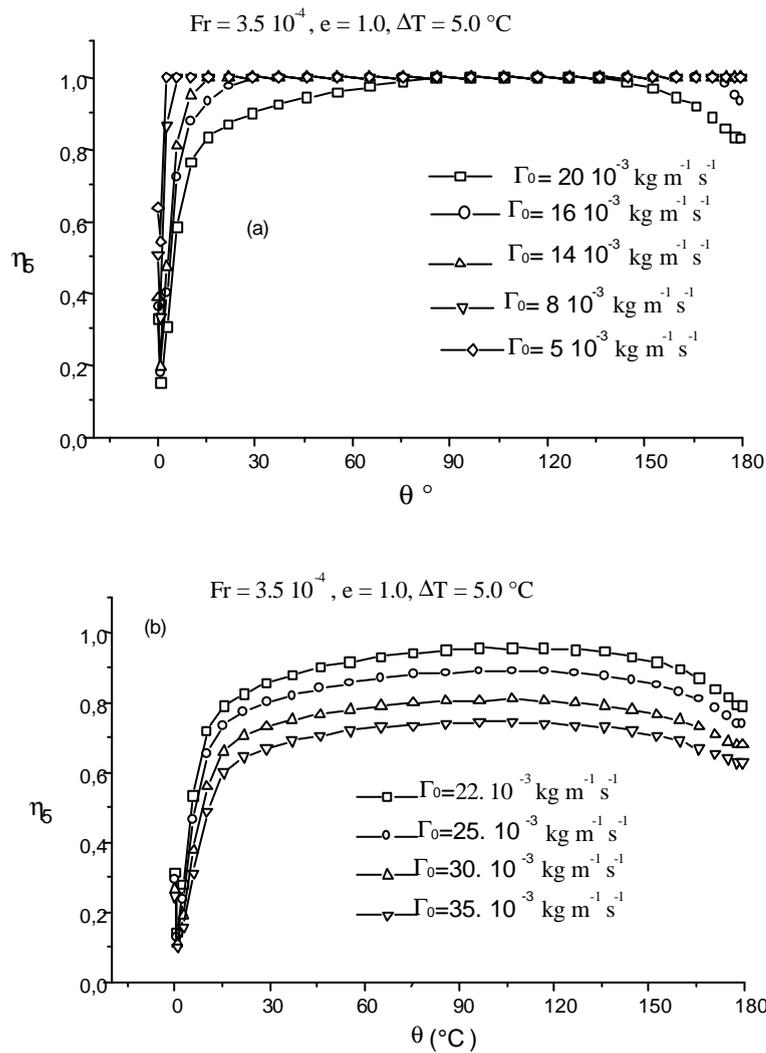


Figure 2 : Evolution de l'épaisseur de la sous-couche laminaire en fonction de l'angle θ .

L'existence d'une double transition (régime de transition - régime laminaire - régime de transition) est un résultat fondamental mis en évidence par la figure 2a. Ce résultat est une conséquence directe de l'évaporation du film liquide ruisselant sur la paroi de l'ellipse précitée. Comme le témoigne la figure 2b, l'augmentation du débit massique par unité de longueur ($\Gamma_0 = 22 \cdot 10^{-3}$, $25 \cdot 10^{-3}$, $30 \cdot 10^{-3}$ et $35 \cdot 10^{-3}$) favorise la réduction de la sous-couche laminaire ($\eta_5 < 1$). Au voisinage du point d'arrêt les tendances déjà commentées (figure 2a) sont préservées et le

régime est généralement turbulent ($y_{\max}^+ \geq 30$). Dans une étude plus détaillée, nous avons remarqué le retour de l'écoulement au régime de transition, s'effectue pour les positions angulaires supérieures à 5° .

Pour un débit massique par unité de longueur égal à $50 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$, on observe l'existence d'un point quasi-statique θ_{qs} , indépendant du nombre de Froude Fr (figure 3). Ce point particulier est caractérisé par le fait qu'à la position θ_{qs} les différentes forces se compensent. En outre, la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par ce point, divise l'écoulement en deux zones distinctes.

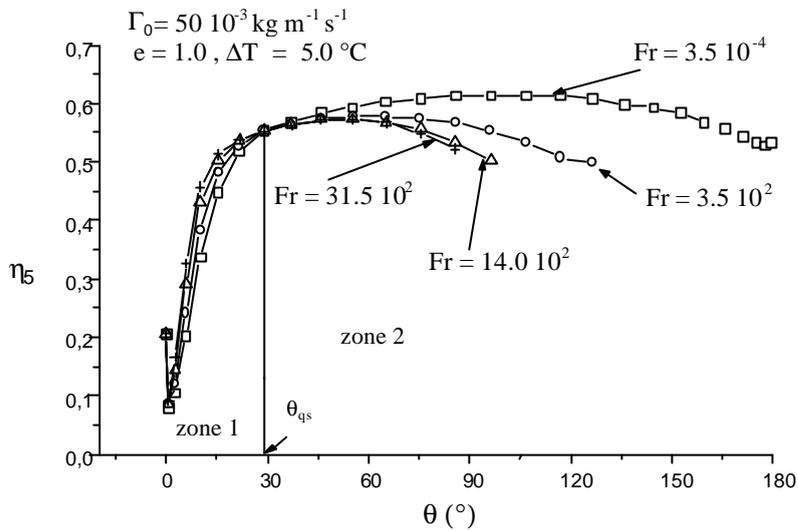


Figure 3 : Influence du nombre de Froude sur l'évolution de η_5 .

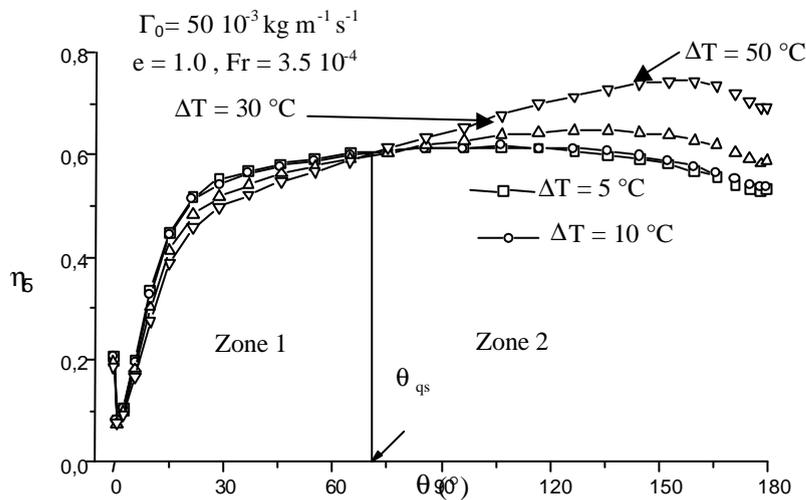


Figure 4 : Influence du nombre Froude (Fr) et de la différence de température entre la paroi et l'interface liquide-vapeur ΔT sur l'évolution de η_5 .

Dans la zone 1 où les forces dues à la gravité et au gradient de pression sont prédominantes, nous remarquons que l'ordonnée η_5 augmente avec le nombre de Froude. Dans la zone 2 où les forces de frottement l'emportent, les tendances sont inversées par comparaison à la première zone. Il s'ensuit une diminution de l'étendue de la sous-couche laminaire. A l'exception de la courbe qui correspond à un nombre de Froude égal à

$3.5 \cdot 10^{-4}$, nous observons que l'écoulement n'atteint pas le bas du tube à cause de l'existence du phénomène d'assèchement [5]. Pour le même débit et pour un nombre de Froude fixé à $3.5 \cdot 10^{-4}$, l'influence de la différence de température entre la paroi et l'interface liquide-vapeur sur les variations du paramètre η_5 est similaire à celle du nombre de Froude. On remarque l'existence d'un nouveau point quasi-statique θ_{qs} indépendant de la différence de température entre la paroi et l'interface liquide-vapeur.

Pour un débit massique par unité de longueur égal à $8 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$, l'analyse de l'influence du gradient de pression dû à la courbure (fig. 5) montre que l'ordonnée η_5 correspondant à la souche laminaire subit au voisinage du point d'arrêt les mêmes variations que précédemment.

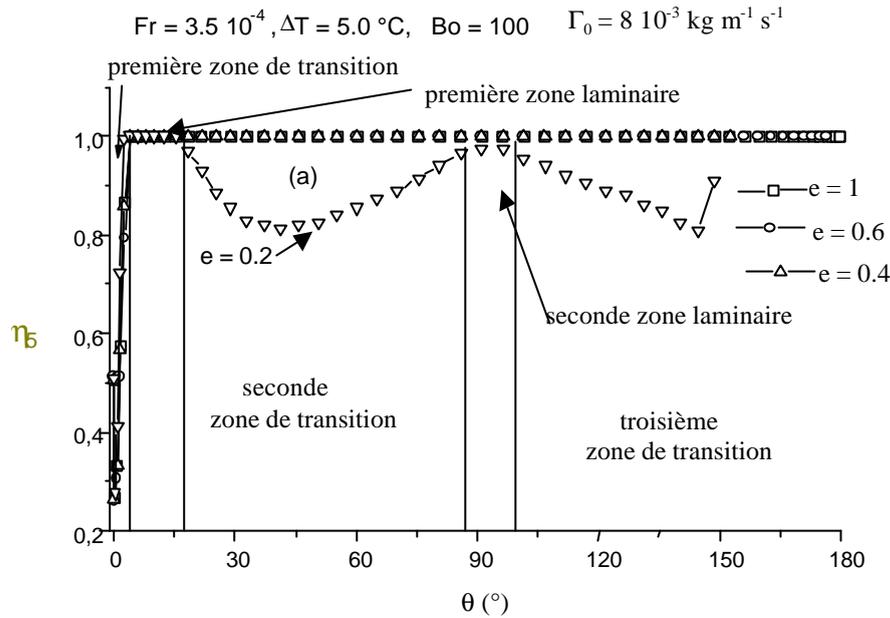


Figure 5 : Influence du gradient de pression dû à la courbure sur l'évolution de η_5 .

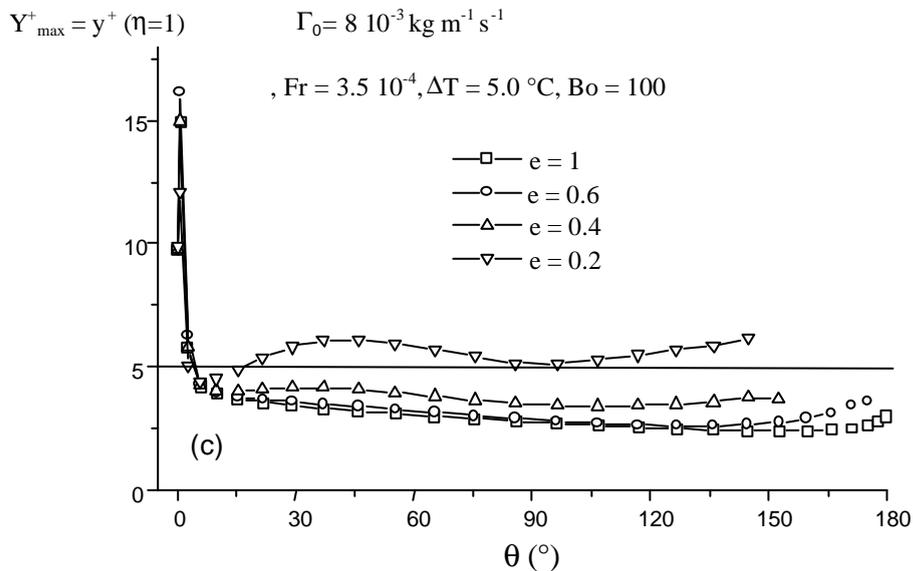


Figure 6 : Evolution de y^+_{\max} en fonction de l'angle paramétrique θ

Pour les excentricités $e = 1.0$, 0.6 et 0.4 la position angulaire θ_{ft1} caractérisant la fin de transition, est légèrement modifiée et l'écoulement demeure laminaire à partir de cette position tout au long de la paroi externe de

l'ellipse. En outre, un comportement singulier est observé pour l'ellipse dont l'excentricité e est égale à 0.2. Pour cette valeur particulière de l'excentricité, les zones laminaires et celles de transition sont alternées en commençant par une première zone de transition au voisinage du point d'arrêt (fig.5).

Ce phénomène est beaucoup plus évident sur la figure 6 où on représente l'évolution de y_{\max}^+ en fonction de l'angle paramétrique θ . Les zones pour lesquelles $y_{\max}^+ \leq 5$ sont des sous-couches laminaires [3] tandis que les zones de transition caractérisées par des valeurs de y_{\max}^+ compris entre 5 et 30 sont des zones de transition [3]. Dans ce cas particulier la réapparition de la première zone laminaire est une conséquence directe d'un fort gradient de pression dû à la courbure qui règne dans cette zone.

6. CONCLUSION

L'étude numérique de l'évaporation d'un film d'eau ruisselant autour de la paroi externe d'un cylindre horizontal de section elliptique montre l'existence de zones de transition entre les régimes laminaire et turbulent de l'écoulement du fluide. La position de ces zones repérée par l'évolution de l'épaisseur du film en fonction de l'angle paramétrique dépend de nombreux paramètres tels que : le débit de liquide par unité de longueur à l'entrée, le gradient de pression due à la courbure de la paroi, la différence de température entre la paroi et l'interface liquide-vapeur et le nombre de Froude.

Nomenclature

a	demi-axe de l'ellipse
Cp	capacité calorifique
d	diamètre équivalent à l'ellipse
e	Excentricité
Fr	nombre de Froude
g	coefficient d'accélération de la pesanteur
Ja	nombre de Jacob
P	Pression
Pr	nombre de Prandtl
T	température
x, y	coordonnées
u	composante de la vitesse suivant l'axe x
v	composante de la vitesse suivant l'axe y

Symboles grecques

Γ	débit de liquide par unité de longueur
δ	épaisseur du film liquide
η	coordonnée transformée
μ	viscosité dynamique

ν	viscosité cinématique
λ	conductivité thermique
ρ	masse volumique
σ	tension superficielle
θ	angle paramétrique

indices

c	courbure
e	extérieure à la phase vapeur
ft	fin de la zone de transition
l	liquide
v	vapeur
t	turbulent
w	paroi
τ	contrainte de cisaillement
0	l'entrée de l'ellipse

exposant

*	grandeurs dimensionnelles
---	---------------------------

REFERENCES

- [1] K. R. Chun and R. A. Seban, *Heat Transfer to evaporating liquid films*, Journal of Heat Transfer, (1971) pp. 391-396,
- [2] M. Asbik, H. Boushaba, R. Chaynane, B. Zeghmati, A. Khmou, *Prediction of onset of boundary layer transition in film condensation on horizontal elliptical cylinder*, Numerical Heat Transfer, 43 n° 1 ,(2003) pp. 83-109
- [3] Th. Von Karman, *The analogy between fluid friction and heat transfer*, Transaction of the ASME, (1939) pp.705-710
- [4] H. B. Keller, *Numerical methods in boundary-layer theory*, Ann. Rev. Fluid. Mech, 10, (1978) pp. 417-433
- [5] Ansari, M. Asbik, B. Zeghmati, *Evolution du point d'assèchement durant l'évaporation d'un film liquide ruisselant sur la paroi d'une ellipse horizontale*, 6^{ème} Congrès de Mécanique, Tanger du 15 au 18 Avril 2003, (accepté).
- [6] M. Asbik, O. Ansari, B. Zeghmati, J. Bresson, *Etude numérique de l'évaporation d'un film mince ruisselant autour de la paroi extérieure d'une ellipse horizontale*, Colloque Inter Universitaire Franco-Québécois, Canada 26-28 mai 2003 (acceptée).