

# TRANSFERT DE CHALEUR ET DE MASSE PAR CONVECTION MIXTE DANS UN ÉCOULEMENT LAMINAIRE EXTERNE

E.H. Mezaache<sup>1</sup>, H. Sedrati<sup>1</sup> et M. Daguenet<sup>2</sup>

1.Laboratoire de Recherche sur la Physico-chimie des Surfaces et Interfaces,  
Université de Skikda, BP. 26, Skikda 21000, Algérie (fax: 213-38-702061, email :  
e\_mezaache@yahoo.fr).

2.Laboratoire de Thermodynamique et Energétique, Université de Perpignan, 52,  
avenue de Villeneuve, 66860 Perpignan cedex, France (fax : 33-4-68-665291), email :  
daguenet@gala.univ-perp.fr).

## RESUME

Les auteurs étudient numériquement, à l'aide de la méthode implicite aux différences finies centrées et à maillage variable du type "box method", l'influence de la convection naturelle induite par gradients thermiques sur les transferts de chaleur, de masse et d'impulsion entre un écoulement laminaire externe et une paroi plane verticale et isotherme, dont la surface est couverte d'une espèce chimique diffusante. Les résultats présentés portent sur : (i) l'évolution des champs de vitesse et de température au sein de l'écoulement ; (ii) le transfert pariétal de chaleur, de masse et d'impulsion, représentés respectivement par le nombre de Nusselt, de Sherwood et le coefficient de frottement ; (iii) le décollement de l'écoulement survenant dans le cas où la convection naturelle s'opposerait à l'écoulement potentiel. Les équations de bilan dynamiques, thermiques et diffusives dans l'écoulement gazeux sont approchées par des couches limites bidimensionnelles. A l'aide de la transformation de Skan-Falkner et de la définition de la vitesse de référence pour l'écoulement potentiel, elles sont présentées sous une formulation générale adimensionnelle s'appliquant aux convections naturelle, forcée et mixte avec ou sans transfert de masse.

**Mots clés :** convection mixte écoulement externe, couche limite, transfert de chaleur et de masse, diffusion.

## NOMMENCLATURE

Symbole	Quantité	Unité
$c_p$	capacité calorifique à pression constante	J. kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>
$D$	coefficient de diffusion massique	m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup>
$g$	accélération de la pesanteur	m.s <sup>-2</sup>
$h$	enthalpie statique	J.kg <sup>-1</sup>
$H$	enthalpie totale	J. kg <sup>-1</sup>
$k$	Conductivité thermique	W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>
$L$	longueur de la paroi	m
$m$	concentration massique	
$Nu$	nombre de Nusselt	
$Sh$	nombre de Sherwood	
$T$	température	K
$u$	vitesse suivant $Ox$	m.s <sup>-1</sup>
$v$	vitesse suivant $Oy$	m.s <sup>-1</sup>
$x$	abscisse dans le sens de l'écoulement	m
$y$	coordonnée normale à la paroi	m
Lettres grecques		
$\beta$	coefficient d'expansion volumique	K <sup>-1</sup>
$\delta$	épaisseur de déplacement	m
$\mu$	viscosité dynamique	kg.m <sup>-1</sup> .s <sup>-1</sup>
$\theta$	épaisseur de quantité de mouvement	m
$\rho$	masse volumique	kg.m <sup>-3</sup>
Indices		
$1$	espèce diffusante	
$2$	écoulement potentiel	
$e$	frontière extérieure de la couche limite	
$p$	Paroi	

## 1. INTRODUCTION

L'étude des transferts couplés de chaleur et de masse par convection mixte est d'une grande importance pour la maîtrise de processus industriels et la compréhension de nombreux phénomènes physiques ; aussi suscite-elle beaucoup l'intérêt des chercheurs. Par exemple, Wickern [1] étudie l'influence de l'inclinaison d'une paroi plane sur les grandeurs de transferts. Lee et Hsu [2] examinent la contribution de la convection naturelle sur le transfert de chaleur et de masse pour une paroi plane horizontale. Les travaux de Yiicel et al [3] portent sur la convection mixte à l'intérieur d'une conduite rectangulaire ouverte sur ses deux extrémités. Dans le présent article, nous étudions numériquement l'influence de la convection naturelle thermique, caractérisée par le nombre de Richardson thermique, sur les grandeurs physiques régissant le transfert de chaleur et de masse. Deux cas physiques différents sont examinés. Le premier considère que le mouvement de convection naturelle thermique est dans le même sens que l'écoulement potentiel. Le second suppose que les mouvements de la convection naturelle et de l'écoulement potentiel sont de sens opposés.

## 2. FORMULATION DU PROBLEME

L'origine du repère  $xOy$  est située sur la paroi et coïncide avec son bord d'attaque. L'axe  $Ox$  est orienté suivant le sens ascendant de l'écoulement potentiel ;  $Oy$  est perpendiculaire à la paroi et orienté vers l'intérieur de l'écoulement gazeux. Nous posons les hypothèses simplificatrices suivantes : (i) l'écoulement gazeux ainsi que les transferts de chaleur et de matière sont permanents ; (ii) l'écoulement gazeux s'effectue en couche limite bidimensionnelle laminaire.

### 2.1. Equations de bilan

Les équations de la convection mixte laminaire bidimensionnelle pour un écoulement externe sur une paroi plane verticale s'expriment comme suit [4,5] :

- Equation de continuité

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

- Equation du mouvement suivant  $Ox$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + (\rho - \rho_e) g_x \quad (2)$$

Le deuxième terme du second membre de cette équation traduit la différence entre la densité volumique locale et celle de l'écoulement potentiel et peut être calculé à l'aide de l'approximation de Boussinesq :

$$(\rho - \rho_e) = -\rho_e \beta_t (T - T_e) - \rho_e \beta_m (m_1 - m_{1,e}) \quad (3)$$

L'équation du mouvement simplifiée devient :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \rho_e \beta_t (T - T_e) g_x - \rho_e \beta_m (m_1 - m_{1,e}) g_x \quad (4)$$

- Equation de la chaleur

Elle peut être exprimée en fonction de l'enthalpie totale :

$$\rho \left( u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} + \mu \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) u \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\mu}{Pr} (Le - 1) (h_1 - h_2) \frac{\partial m_1}{\partial y} \right] \quad (5)$$

Le deuxième terme du second membre de cette équation représente le flux de chaleur échangé par diffusion enthalpique.

- Equation de la diffusion convective

$$\rho u \frac{\partial m_1}{\partial x} + \rho v \frac{\partial m_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho D \frac{\partial m_1}{\partial y} \right) \quad (6)$$

### 2.2. Conditions aux limites

- A la paroi ( $y = 0$ )

La condition d'adhérence à la paroi s'écrit :

$$u_p = 0 \quad (7)$$

La paroi étant imperméable à l'écoulement gazeux ; la loi de diffusion massique de Fick, valable dans la phase gazeuse, compte tenu des hypothèses précédentes, la densité du flux massique au niveau de la paroi s'écrit :

$$v_p = - \left[ D \frac{1}{1 - m_1} \frac{\partial m_1}{\partial y} \right]_p \quad (8)$$

La surface de la paroi étant en équilibre thermodynamique local par hypothèse, on peut écrire :

$$T_p = T(x) \quad (9)$$

La concentration massique de l'espèce diffusante à la surface de la paroi s'exprime par :

$$m_p = m(x) \quad (10)$$

- A la frontière extérieure de la couche limite gazeuse ( $y \rightarrow \infty$ )

Les conditions aux limites se ramènent aux conditions d'entrée.

$$u = u_e(x) = u_\infty \quad (11)$$

$$T = T_e(x) = T_\infty \quad (12)$$

$$m = m_e(x) = m_\infty \quad (13)$$

### 3. ADIMENSIONNALISATION DES EQUATIONS

#### 3.1. Principales grandeurs

Le nombre de Reynolds local, les nombres de Prandtl, de Schmidt, de Lewis et d'Eckert sont définis par :

$$Re = \frac{\rho_e u_e x}{\mu_e} \quad Pr = \frac{\mu c_p}{k} \quad Sc = \frac{\mu}{\rho D} \quad Le = \frac{Pr}{Sc} \quad Ec = \frac{u_e^2}{h_e} \quad (14)$$

La vitesse locale, le nombre de Grashoff, le nombre de Richardson de la convection naturelle thermique et massique et l'accélération adimensionnelle longitudinale de la pesanteur s'écrivent :

$$Gr_t(x) = \left[ \frac{u_t(x)x}{\nu_e} \right]^2 \quad Gr_m(x) = \left[ \frac{u_m(x)x}{\nu_e} \right]^2 \quad Ri_t(x) = \frac{Gr_t(x)}{Re_r^2(x)} \quad Ri_m(x) = \frac{Gr_m(x)}{Re_r^2(x)} \quad g_x^* = \frac{g_x}{g} \quad (15)$$

#### 3.2. Equations de bilan

Afin de réduire le nombre d'équations, nous introduisons la fonction de courant,  $\psi$ , définie par :

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \rho v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (16)$$

L'équation de continuité est vérifiée et le nombre des équations de bilan est réduit à trois :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0 \quad (17)$$

Introduisons la transformation de Skan-Falkner :

$$(x, y) \rightarrow (\xi, \eta) \quad \psi(x, y) \rightarrow F(\eta, \xi) \quad (18)$$

Les coordonnées adimensionnelles longitudinale  $\xi$  et normale  $\eta$  sont définies par :

$$\xi = \frac{x}{L} \quad \eta = \frac{u_r}{\sqrt{\rho_e u_r \mu_e x}} \int_0^y \rho dy \quad (19)$$

La fonction de courant adimensionnelle,  $F$ , est définie par :

$$F(\xi, \eta) = \frac{\psi}{\sqrt{\rho_e u_r \mu_e x}} \quad (20)$$

$L$  est une grandeur caractéristique désignant la longueur de la paroi ;  $u_r$  est la vitesse de référence définie par :

- en convection forcée :  $u_r(x) = u_e(x)$

- en convection naturelle thermique :  $u_r(x) = u_t(x) = \sqrt{g \beta_t |T_p - T_e| x}$

- en convection naturelle massique :  $u_r(x) = u_m(x) = \sqrt{g\beta_m |m_{1,p} - m_{1,e}| x}$

Les équations adimensionnelles de bilan s'écrivent :

$$(b_1 F''') + c_1 F F'' - c_2 (F')^2 \pm b_2 Ri_t(x) g_x^* \theta \pm b_2 Ri_m(x) g_x^* (1-Z) = x \left( F' \frac{\partial F'}{\partial x} - F'' \frac{\partial F}{\partial x} \right) \quad (21)$$

$$(b_3 G' + b_4 F' F'' + d_1 Z') + c_1 F G' = \xi \left( F' \frac{\partial G}{\partial \xi} - G' \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) \quad (22)$$

$$(b_3 G' + b_4 F' F'' + d_1 Z') + c_1 F G' = \xi \left( F' \frac{\partial G}{\partial \xi} - G' \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) \quad (23)$$

Le symbole «' » dénote la dérivation par rapport à  $\eta$ . Le signe « $\pm$  » indique si la convection naturelle thermique ou massique se développe dans le même sens que l'écoulement potentiel «-» ou en sens contraire «+».

### 3.3. Conditions aux limites

- A la paroi ( $\eta = 0$ )

$$F'_p = 0 \quad (24)$$

$$Z'_p - \frac{Sc_p}{b_p} \frac{1 - m_{1,p}}{m_{1,e} - m_{1,p}} \left[ \xi \frac{\partial F}{\partial \xi} + m_1 F \right]_p = 0 \quad (25)$$

$$G_p = \frac{H_p}{H_e} \quad (26)$$

$$Z_p = 0 \quad (27)$$

- A la frontière extérieure de la couche limite gazeuse ( $\eta \rightarrow \infty$ )

$$F'_e = 1 \quad (28)$$

$$G_e = 1 \quad (29)$$

$$Z_e = 1 \quad (30)$$

Les grandeurs adimensionnelles,  $\theta$ ,  $G$  et  $Z$ , désignent respectivement la température adimensionnelle, l'enthalpie totale et la concentration massique. Elles sont définies par :

$$\theta = \frac{T - T_e}{T_p - T_e} \quad G = \frac{H}{H_e} \quad Z = \frac{m_1 - m_{1,p}}{m_{1,e} - m_{1,p}} \quad (31)$$

où les enthalpies statique  $h$  et totale  $H$  sont données par :

$$h = \int_0^T c_p dT \quad H = h + \frac{u^2}{2} \quad (32)$$

Les expressions des coefficients  $b_i$  sont les mêmes que ceux relatifs à un écoulement monophasique ; les coefficients  $a_i$  concernent le transfert par diffusion massique ; les grandeurs  $c_i$  dépendent de la vitesse de référence ; le coefficient  $d_1$  caractérise le transfert par diffusion enthalpique, ce terme est généralement sans influence remarquable.

## 4. RESULTATS ET DISCUSSION

### 4.1. Influence du nombre de Richardson thermique sur le champ de vitesse et de température de l'écoulement mixte

La figure 1 présente les profils de la vitesse et de la température, à la position axiale,  $x/L = 1$ , en fonction de l'ordonnée adimensionnelle,  $\eta$ . Cette position désigne le bord de sortie et correspond à une vitesse locale de convection naturelle thermique maximale. La convection naturelle est choisie dans le même sens de l'écoulement potentiel (nombre de Richardson thermique positif). Cette situation est réalisée en imposant une température de paroi supérieure à celle de l'écoulement potentiel. La valeur,  $Ri_t = 0$ , traduit l'absence de la

convection naturelle thermique et correspond à la convection forcée seule. Pour  $Ri_t$  supérieur à l'unité, la vitesse de l'écoulement dépasse celle de l'écoulement potentiel et s'explique par la contribution importante de la convection naturelle dans l'écoulement mixte (fig. 1a). L'augmentation du nombre de Richardson thermique accroît le gradient normal à la paroi de la vitesse et la température (fig. 1b), ce qui conduit à une augmentation du frottement et de la densité du flux de chaleur. Notons aussi, qu'à l'entrée de la plaque, l'écoulement est principalement forcé. La convection naturelle thermique ne se manifeste que loin du bord d'attaque de la plaque, son importance est mesurée par la valeur du nombre de Richardson thermique.

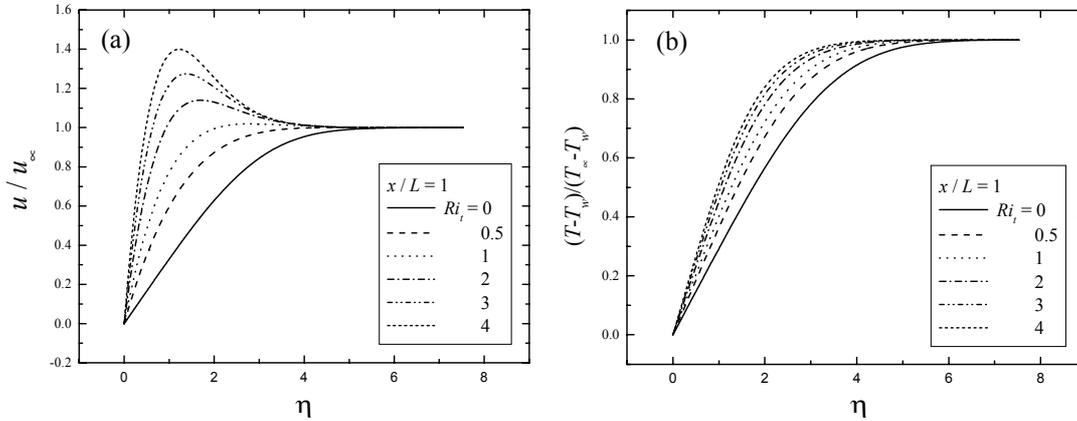


Fig. 1. Variation transversale de la vitesse longitudinale,  $u/u_\infty$ , et de la température adimensionnelle,  $(T - T_w)/(T_\infty - T_w)$ , en fonction du nombre de Richardson thermique,  $Ri_t$ .

#### 4.2. Influence du nombre de Richardson thermique sur les variations pariétales des grandeurs dynamiques et thermiques de l'écoulement mixte

Les figures 2 à 5 illustrent l'influence du nombre de Richardson thermique sur les variations des grandeurs dynamiques et thermiques de l'écoulement mixte en fonction du nombre de Reynolds local. Deux représentations sont utilisées : les coefficients de transferts et les groupements adimensionnels correspondants. Elles montrent que l'augmentation du nombre de Richardson thermique provoque une diminution de l'épaisseur de déplacement (fig. 2a) et de quantité du mouvement (fig. 3a), et un accroissement du coefficient de frottement (fig. 4a) et du nombre de Nusselt (fig. 5a). Pour les faibles valeurs de  $Ri_t$ , la convection forcée domine, l'épaisseur de déplacement croît avec le nombre de Reynolds local. On retrouve les résultats relatifs à la convection forcée donnés par différents travaux [4]. Pour les grandes valeurs de  $Ri_t$ , la contribution de la convection naturelle est importante, elle accélère l'écoulement, amincit la couche limite dynamique, d'où on obtient des épaisseurs de déplacement et de quantité du mouvement négatives.

La représentation utilisant les groupements adimensionnels est bien adaptée à l'interprétation physique car d'une part, ces groupements ont des variations pariétales quasi linéaires, d'autre part les variations de l'épaisseur de déplacement (fig. 2b) et de quantité du mouvement (fig. 3b) sont toutes décroissantes, celles du frottement (fig. 4b) et de transfert de chaleur (fig. 4c) sont toutes croissantes.

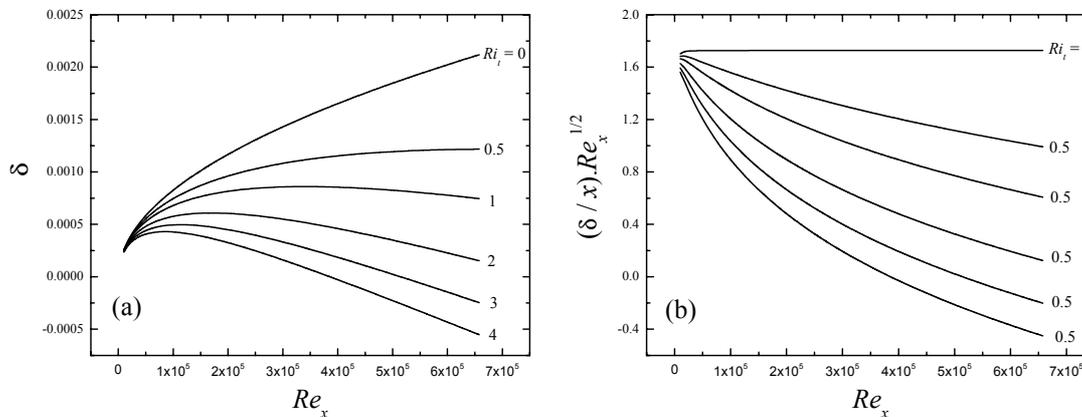


Fig. 2. Variations de l'épaisseur de déplacement,  $\delta$ , et de son groupement adimensionnel,  $(\delta/x)Re_x^{1/2}$ , en fonction du nombre de Reynolds local,  $Re_x$ , pour différentes valeurs du nombre de Richardson thermique,  $Ri_t$ .

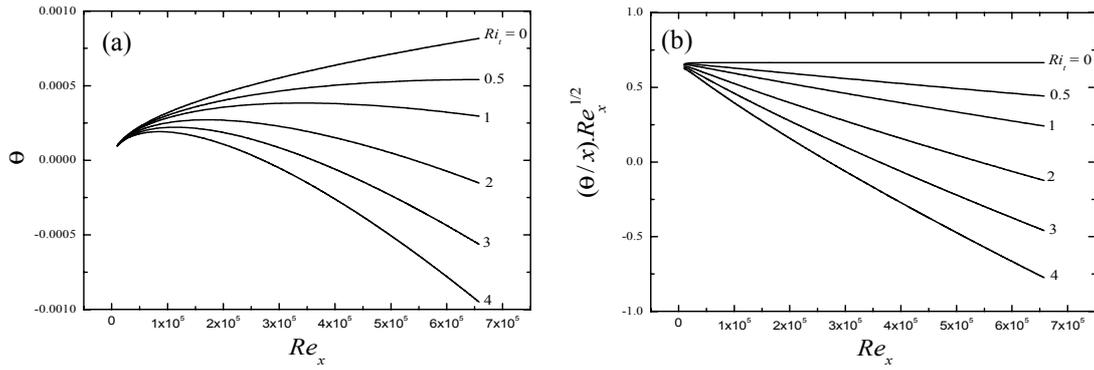


Fig. 3. Variations de l'épaisseur de quantité du mouvement,  $\theta$ , et de son groupement adimensionnel,  $(\theta/x)Re_x^{1/2}$ , en fonction du nombre de Reynolds local,  $Re_x$ , pour différentes valeurs du nombre de Richardson thermique.

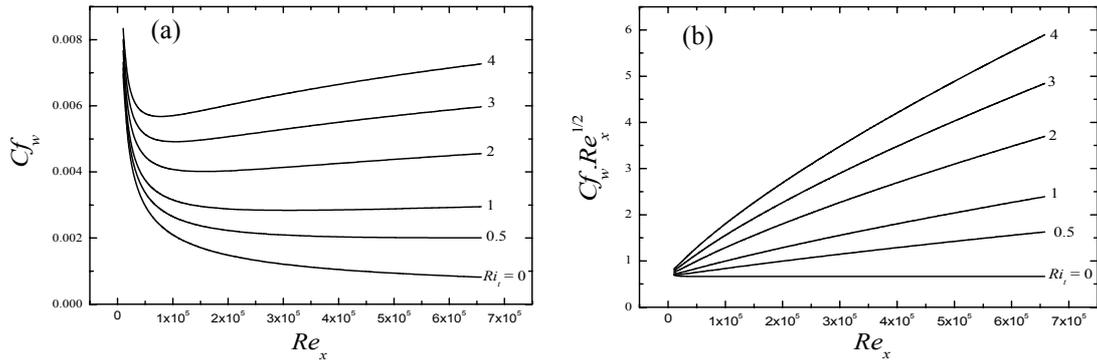


Fig. 4. Variations du coefficient de frottement pariétal,  $Cf_p$ , et de son groupement adimensionnel,  $Cf_p Re_x^{1/2}$ , en fonction du nombre de Reynolds local,  $Re_x$ , pour différentes valeurs du nombre de Richardson thermique,  $Ri_t$ .

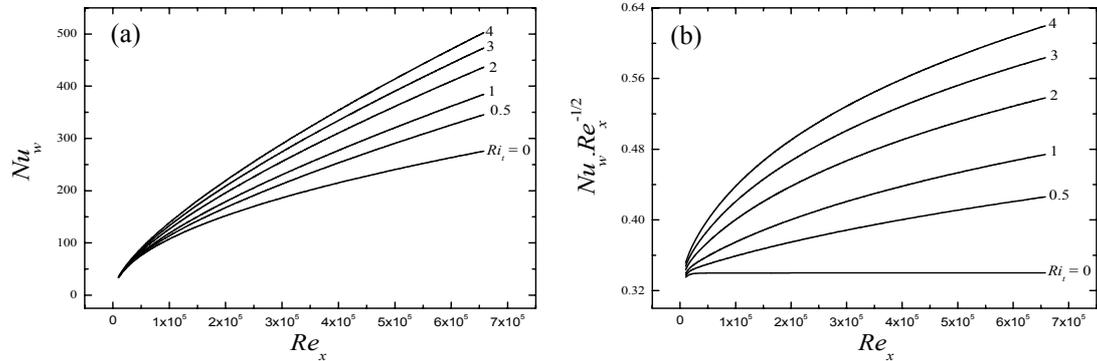


Fig. 5. Variations du nombre de Nusselt pariétal,  $Nu_w$ , et de son groupement adimensionnel,  $Nu_w Re_x^{-1/2}$ , en fonction du nombre de Reynolds local,  $Re_x$ , pour différentes valeurs du nombre de Richardson thermique,  $Ri_t$ .

#### 4.3. Influence du nombre de Richardson sur le décollement de l'écoulement mixte

Les figures 6 et 7 donnent les variations longitudinales des grandeurs dynamiques et thermiques d'un écoulement en convection mixte, en considérant deux cas distincts de la convection naturelle thermique. Le premier traite une convection naturelle thermique de même sens que l'écoulement potentiel. Il est caractérisé par un nombre de Richardson positif et a fait l'objet d'une étude au paragraphe précédent. Le second concerne une convection naturelle de sens opposé à l'écoulement potentiel. Il est caractérisé par un nombre de Richardson thermique négatif. Il montre que l'augmentation de la valeur absolue du nombre de Richardson thermique provoque une atténuation des groupements adimensionnels à la paroi, notamment ceux de l'épaisseur de déplacement (fig. 6a), de l'épaisseur de quantité du mouvement (6b), du nombre de Nusselt (fig. 7a) et du nombre de Sherwood (fig. 7b). Pour certaines valeurs du nombre de Richardson thermique, tels que  $Ri_t = -1, -0.5$ , le coefficient de frottement pariétal s'annule, ce qui traduit un décollement de l'écoulement mixte à la paroi. Le point de décollement recule vers le bord d'attaque dès que le module du nombre de Richardson thermique augmente. Pour un nombre de Richardson thermique suffisamment grand en valeur absolue, le décollement de l'écoulement mixte se produit même au voisinage du bord d'attaque de la plaque.

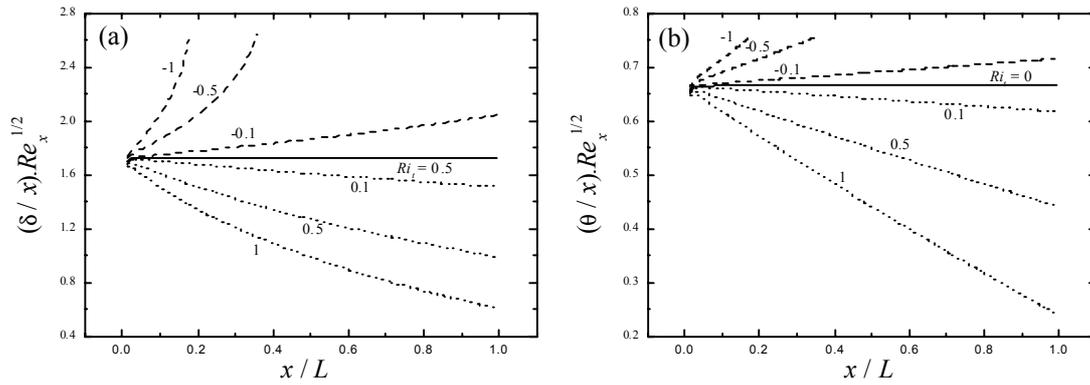


Fig. 6. Variations longitudinales des groupements adimensionnels relatifs aux épaisseurs de déplacement,  $(\delta/x)Re_x^{-1/2}$ , et de quantité du mouvement,  $(\theta/x)Re_x^{-1/2}$ , en fonction du nombre de Richardson thermique,  $Ri_t$ .

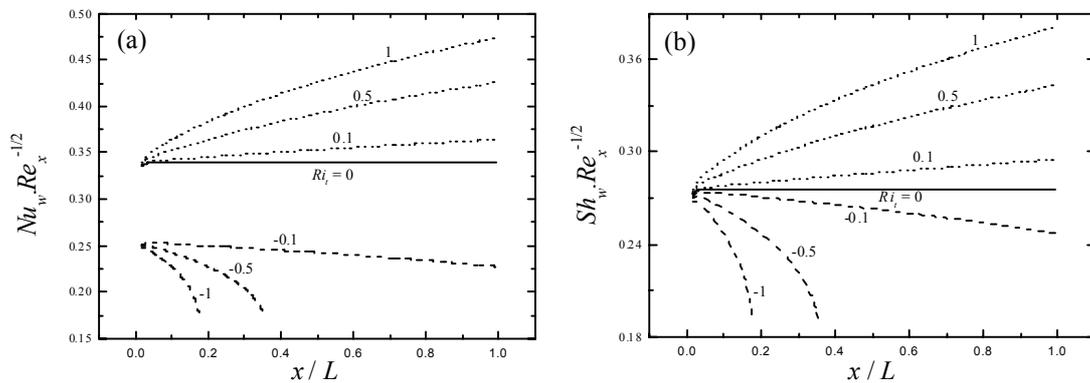


Fig. 7. Variations longitudinales des groupements adimensionnels du nombre de Nusselt,  $Nu_w Re_x^{-1/2}$ , et du nombre de Sherwood,  $Sh_w Re_x^{-1/2}$ , en fonction du nombre de Richardson thermique,  $Ri_t$ .

## CONCLUSION

Cette étude numérique, basée sur la méthode implicite aux différences finies centrées et à maillage variable du type "box method", s'intéresse au transfert de chaleur et de masse par convection mixte. Pour le cas d'un écoulement laminaire externe ascendant et une paroi plane verticale et isotherme, dont la surface est couverte d'une espèce chimique diffusante, les résultats obtenus montrent qu'en l'absence de la convection naturelle, l'écoulement présente une similitude des profils de la vitesse longitudinale et de la température. Pour un mouvement de convection naturelle de même sens que l'écoulement potentiel, le premier accélère l'écoulement mixte et accroît sa vitesse, ce qui amincit les épaisseurs des couches limites dynamique et thermique et accroît le coefficient de frottement et le nombre de Nusselt. Si la convection naturelle est de sens contraire à l'écoulement potentiel, il se produit un décollement dont la position est localisée à l'aide du calcul du coefficient de frottement pariétal. les groupements adimensionnels des grandeurs de transferts offrent une représentation bien adaptée à l'interprétation physique

## REFERENCES

- [1] Wickern G., "Mixed convection from an arbitrarily inclined semi-infinite flat plate - The influence of the inclination angle", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 34, pp. 1935-1945, (1991).
- [2] Lee S.L. and Hsu K., "Interaction of surface suction blowing with buoyancy force on mixed convection flow adjacent to an inclined flat plate", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 32, pp. 1989-1991, (1989).
- [3] Yiicel C., Hasnaoui L., Robillard L. and Bilgen E., "Mixed convection heat transfer in open ended inclined channels with discrete isothermal heating", Numerical Heat Transfer, Vol. 24, pp. 109-126, (1993).
- [4] Cebeci T. and Bradshaw P., "Physical and computational aspects of convective heat transfer", Springer-Verlag, New York, (1984).
- [5] Schröppel J. and Thiele F., "On the calculation of momentum, heat and mass transfer in laminar and turbulent boundary layer flows along a vaporizing liquid film", Numerical Heat Transfer, Vol. 6, pp. 475-496, (1983).