

# Simulation Numérique d'un Écoulement dans un Canal en présence d'un Milieu Poreux par la Méthode de Lattice Boltzmann

S. Boudraa, D. E. Ameziani, K. Bouhadef  
*Laboratoire de Transports Polyphasiques et Milieux Poreux*  
*Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene*  
*16111, Bab Ezzouar, Alger – Algérie*

E-mail [s.boudraa@yahoo.fr](mailto:s.boudraa@yahoo.fr)

E-mail [ameziani.de@gmail.com](mailto:ameziani.de@gmail.com)

E-mail [khed.bouh@gmail.com](mailto:khed.bouh@gmail.com)

**Résumé :** La présente étude est une simulation numérique de la convection dans un canal partiellement poreux par la méthode de Boltzmann. Le modèle bidimensionnel D2Q9 à 9 vitesses discrètes a été utilisé pour simuler l'aspect dynamique du problème, tandis que le modèle D2Q5 est considéré pour le champ thermique. L'effet de la viscosité a été introduit dans l'équation de Boltzmann. En comparant les résultats de l'étude, aux solutions numériques, un accord raisonnable a été observé. Les effets des paramètres de contrôle tels que le nombre de Darcy ou l'épaisseur du milieu poreux, sur les performances thermiques, ont été étudiés.

**Mots clés :** convection forcée ; milieu poreux ; canal ouvert, transferts thermiques.

## 1. Introduction

Les calculs numériques en mécanique des fluides se sont considérablement développés au cours de ces dernières décennies. Ceci est dû aux ressources informatiques qui sont de plus en plus puissantes et qui permettent ainsi la résolution numérique des équations aux dérivées partielles avec une grande précision. Les écoulements de convection dans les conduites pleinement et partiellement remplies de milieu poreux ont été particulièrement abordés par de nombreux chercheurs à cause de leurs nombreuses applications tant au niveau technologique que théorique. La méthode numérique utilisée dans la présente étude, est celle de Boltzmann sur réseau qui a prouvé son efficacité dans la solution des problèmes de mécanique de fluides tels que les écoulements mono ou multiphasiques et les écoulements en milieux poreux. En se basant sur l'équation de transport de Boltzmann, qui décrit l'évolution de la fonction de distribution de probabilité définie dans un espace des positions et des vitesses, la méthode de Boltzmann sur réseau réduit cette fonction de distribution de probabilité en un nombre discret d'états à partir desquels il est possible d'obtenir les variables macroscopiques comme la vitesse, la pression et la température. Il faut mentionner que ces dernières années un nombre croissant d'articles mettant en évidence l'importance et l'efficacité de la méthode de Boltzmann sur réseau a été publié [1-6].

## 2. Formulation mathématique

Le cas considéré est celui d'un écoulement entre deux plaques planes, parallèles, de longueur  $l$  et séparées d'une distance  $h$  (figure 1). Trois blocs solides rectangulaires de même largeur  $w$  et de hauteur  $h_{obs}$ , uniformément séparés d'une distance  $s$ , sont fixés sur l'une des parois. La matrice poreuse est insérée en amont, et en aval de chaque bloc. Le fluide en écoulement, supposé incompressible et à propriétés constantes,

s'écoule en régime laminaire, bidimensionnel dans le canal dont la sortie est supposée assez lointaine pour qu'elle ait un faible effet sur les champs dynamique et thermique. Les effets de dissipation visqueuse et de compression sont considérés comme négligeables.

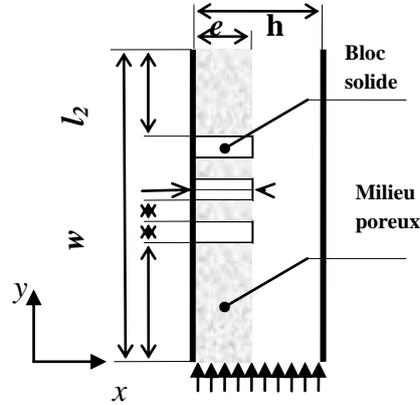


Figure1: Modèle physique

## 2. Multiple Relaxation Time Lattice Boltzmann Equation (MRT-LBE)

Le schéma de Boltzmann sur réseau décrit la distribution de particules  $f_j(x_i, t)$  en  $x_i$ , de vitesse  $v_j$  à l'instant  $t$ . En chaque nœud du réseau on dispose de  $(j+1)$  distributions  $f_j$ . L'évolution du milieu en un pas de temps  $\Delta t$  se décompose en deux étapes fondamentales: la collision et l'advection. Ces deux étapes sont décrites par l'équation :

$$f_j(x+v_j\Delta t, t+\Delta t) = f_j(x,t) + \Omega_j(f_j(x,t)) \quad (1)$$

où  $\Omega_j(f_j(x,t))$  est l'opérateur de collision.

Afin de modéliser le champ de vitesse bidimensionnel dans le domaine considéré, le modèle D2Q9 où chaque motif du réseau est caractérisé par neuf vitesses discrètes :

$e_{1,3} = (\pm 1; 0)$ ;  $e_{2,4} = (0; \pm 1)$ ;  $e_{5,7} = (\pm 1; \pm 1)$ ;  $e_{6,8} = (0; \pm 1)$ ;  $e_0 = (0; 0)$ , a été appliqué. Le champ thermique, quant à lui, a été décrit suivant le modèle D2Q5 (réseau de cinq températures discrètes) [2]. L'étape de collision est traitée dans l'espace des moments. A chaque nœud du domaine, on introduit, de ce fait, les moments  $m_k$  comme étant des combinaisons linéaires des  $f_j$  [1].

$$m_k = \sum_{j=0}^J (M_{k,j}) \cdot f_j \quad (0 \leq k \leq J) \quad (2)$$

où  $(M_{k,j})$   $0 \leq k, j \leq J$  est une matrice dans l'espace des moments  $\mathbf{M}_j(\mathbf{R}^9)$

Certains moments se conservent après la collision tels que le moment associé à la densité de masse et ceux associés à la quantité de mouvement, tandis que les autres (non conservés), se relaxent linéairement vers leurs valeurs d'équilibre. En utilisant le schéma d'Euler explicite pour l'évolution des  $m_k$  par collision on trouve :

$$m_k^*(x, t) = (1 - s_k) m_k(x, t) + s_k m_k^{eq} \quad (3)$$

où  $s_k \equiv \frac{\Delta t}{\tau_k}$  est le taux de relaxation et où  $\tau_k$  est le temps de relaxation, tandis que  $m_k^{eq}$  est la valeur d'équilibre des moments  $m_k$ .

Pour une raison de stabilité, les taux de relaxation vérifient la double inégalité :  $0 \leq s_k \leq 2$ .

## 2.1 Conditions aux limites dynamiques

Etant donné que la vitesse à l'entrée est spécifiée, la fonction de distribution peut être calculée. Pour le modèle D2Q9, les fonctions de distribution  $f_4, f_7, f_8$  étant connues,  $f_2, f_5, f_6$  sont déterminées à partir des relations suivantes :

$$f_2 = f_4 + 2/3 U_0 \quad (4.a) \quad ; \quad f_5 = f_7 + 1/6 U_0 \quad (4.b) \quad ; \quad f_6 = f_8 + 1/6 U_0 \quad (4.c)$$

A la sortie du canal, l'écoulement est établi. Une extrapolation simple est utilisée pour la fonction de distribution :

$$f_{4,n} = f_{4,n-1} \quad (5.a) \quad ; \quad f_{7,n} = f_{7,n-1} \quad (5.b) \quad ; \quad f_{8,n} = f_{8,n-1} \quad (5.c)$$

$n$  étant le dernier nœud du maillage.

Les conditions de rebond pur (« bounce back ») sont utilisées pour spécifier les conditions aux limites de non adhérence sur les parois solides.

## 2.2 Conditions aux limites thermiques

De même, la fonction de distribution pour le champ thermique peut être calculée, connaissant la température à l'entrée. Pour le modèle D2Q5, la fonction de distribution  $g_4$ , est connue et  $g_2$  est définie par la relation suivante :

$$g_{2,n} = -g_{4,n} \quad (6)$$

A la sortie du canal la condition d'établissement s'écrit :

$$g_{2,n} = g_{2,n-1} \quad (7)$$

Sur la paroi solide gauche (température imposée), on utilise la condition suivante :

$$g_{1,n} = 0.5 - g_{3,n} \quad (8)$$

Sur la paroi droite (isolée), on applique la condition suivante :

$$g_{3,n} = g_{3,n-1} \quad (9)$$

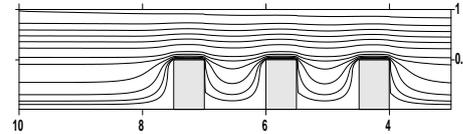
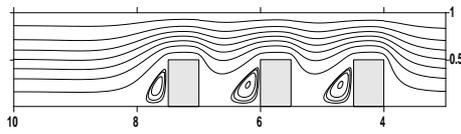
## 3. Résultats

La diversité des paramètres caractéristiques des milieux poreux conduit à plusieurs situations possibles. Dans les résultats qui vont suivre nous avons fixé la conductivité thermique des obstacles et de la matrice poreuse égales à celle du fluide et le nombre de *Darcy* à  $10^{-3}$ , pour s'intéresser à l'influence de l'épaisseur de la couche poreuse et du nombre de *Reynolds* sur les champs dynamique et thermique.

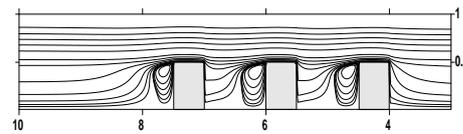
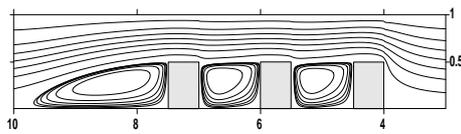
La partie gauche de la figure 2 donne une représentation des lignes de courant dans un canal sans matrice poreuse pour différentes valeurs du nombre de *Reynolds*. Tandis que la partie droite de la même figure représente les lignes de courant dans le canal avec la matrice poreuse d'épaisseur  $e=h/2$ , placée en amont et en aval de chacun des obstacles solides. Les résultats montrent que les zones de recirculation en amont du premier bloc et entre les blocs, disparaissent en présence de la matrice poreuse, pour les faibles valeurs de *Re*. A noter que lorsque le nombre de Reynolds augmente, les recirculations persistent mais, cependant, avec des intensités plus faibles.

Sans milieu poreux

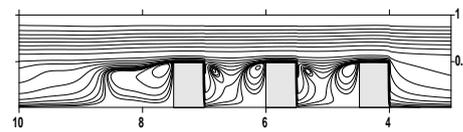
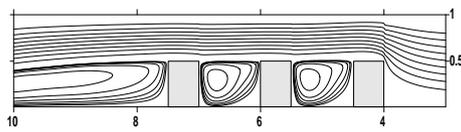
Avec le milieu poreux



$Re = 10$

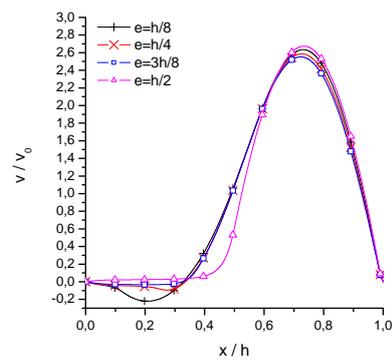


$Re = 100$

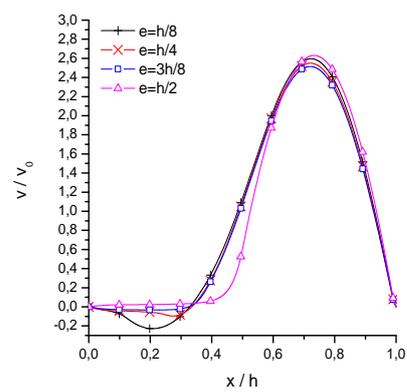


$Re = 400$

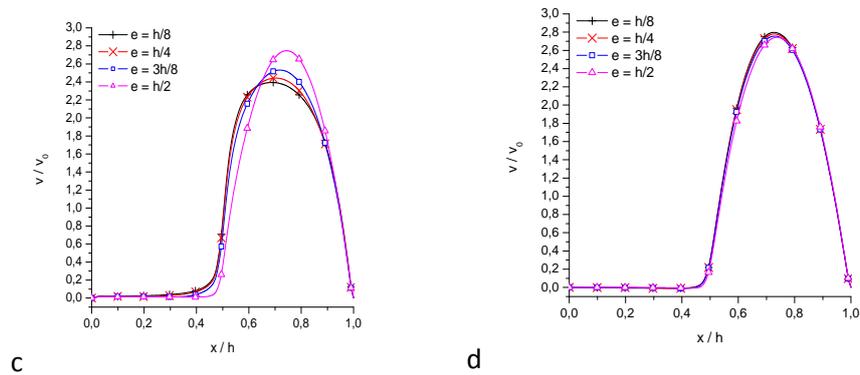
Figure 2 : Lignes de courant pour  $Da = 10^{-3}$ ;  $\varepsilon = 0.95$



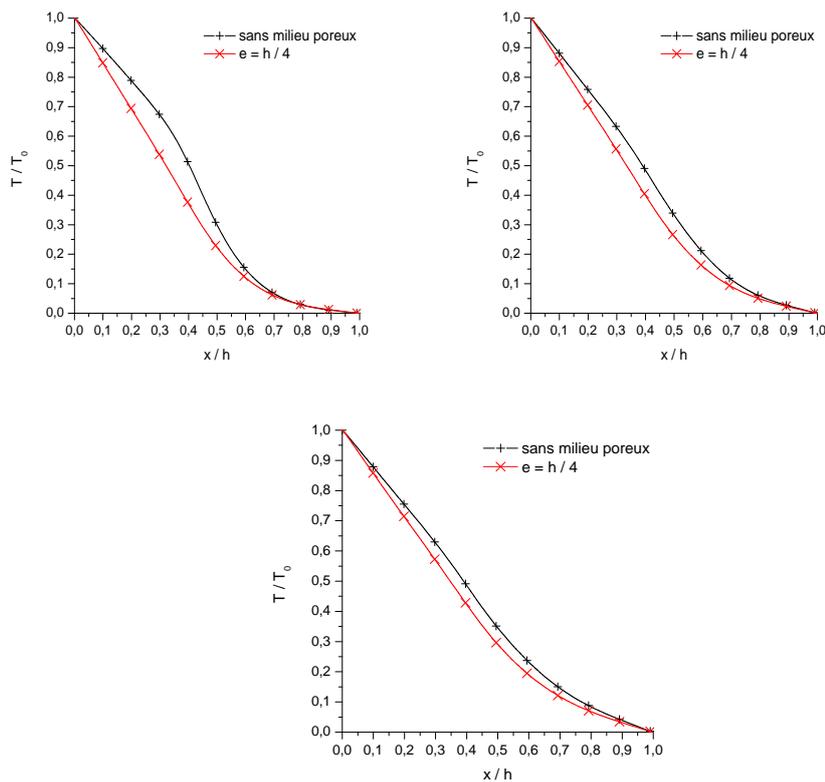
a



b



**Figure 3 :** Profils de vitesse, au milieu de l'espace (a)-entre le 1<sup>er</sup> et le 2<sup>eme</sup> bloc, (b)-entre le 2<sup>eme</sup> et le 3<sup>eme</sup> bloc, (c)-avant le 1<sup>er</sup> bloc, (d)-après le 3<sup>eme</sup> bloc, pour  $Re=50$  ;  $Da=10^{-3}$  ;  $\varepsilon=0.95$  ;  $h_{obs}=h/2$



**Figure 4:** Profil de la température au milieu du 1<sup>er</sup>, du 2<sup>eme</sup> et du 3<sup>eme</sup> bloc,  $Re=100$  ;  $Da=10^{-3}$  ;  $\varepsilon=0.95$  ;  $h_{obs}=h/2$

La figure 3 montre l'effet, sur les profils de vitesse, de l'épaisseur de la couche poreuse. La présence d'une matrice poreuse dans le canal freine l'écoulement du fluide. Cependant, la conservation de débit entraîne une accélération de l'écoulement, pour toutes ces épaisseurs dans la partie complètement fluide. Les valeurs négatives des

vitesse entre les blocs, illustrent bien la présence des zones tourbillonnaires présentes dans ces espaces.

L'effet de la présence de la couche poreuse, sur les échanges thermiques, est présenté sur la figure 4. On note, notamment, que la présence de la matrice poreuse diminue la température dans des blocs solides, ce qui va dans le sens d'une amélioration des échanges.

#### 4. Conclusion

La présente étude a principalement permis de consolider les moyens de description de la dynamique et de la thermique des écoulements incompressibles, en s'intéressant à une nouvelle approche numérique, en l'occurrence la méthode de Lattice-Boltzmann. Cette dernière se base sur une procédure particulière simulant la dynamique microscopique via l'équation de Boltzmann, et permettant de résoudre des problèmes complexes à partir d'algorithmes plus simples et mieux adaptés aux machines de calcul actuelles. L'analyse de résultats obtenus à partir de cette nouvelle approche numérique, a permis de mettre en évidence des solutions qui semblent tout à fait conformes aux résultats de certaines analyses antérieures menées sur la base de méthodes macroscopiques plus lourdes et plus contraignantes.

#### Nomenclature

Da	Nombre de Darcy
Re	Nombre de Reynolds
f	Fonction de distribution de densité
h	Hauteur du canal [m]
T	Température [°C]..
e	Épaisseur de la couche poreuse [m].
$\varepsilon$	Porosité
$h_{obs}$	Hauteur des obstacles

#### Références

- [1]: **M.A. Moussaoui, M. Jami, A. Mezrhab a, H. Najib**, MRT-Lattice Boltzmann simulation of forced convection in a plane channel with an inclined square cylinder, *International Journal of Thermal Sciences* 49 (2010) 131–142
- [2]: **A. Alamyane et A. Ahmed**, Simulation of forced convection in a channel with extended surfaces, by the lattice Boltzmann method, *Computers and Mathematics with Applications*, (2009).
- [3]: **Z. Guo, T.S. Zhao**, Lattice Boltzmann model for incompressible flows through porous media, *Phys. Rev. E* 66 (2002) 036304
- [4]: **Z. Guo, B. Shi, C. Zheng**, A coupled lattice BGK model for the Boussinesq equations, *Int. J. Numer. Methods Fluids* 39 (4) (2002) 325–342.
- [5]: **T. Seta, E. Takegoshi, K. Okui**, Lattice Boltzmann simulation of natural convection in porous media, *Math. Comput. Simul.* 72 (2006) 195–200
- [6]: **Shokouhmand H, Jam F., Salimpour M.R.**, Simulation des transferts thermiques dans un milieu partiellement et totalement poreux, 12<sup>èmes</sup> Journées Internationales de Thermique, (2008).

Note: Ce travail a vu la collaboration de M. Zerrouki et M. Abdellah, élèves ingénieurs à la faculté de GMGP de l'USTHB, dans le cadre de la réalisation de leur projet de fin d'études.