



## Effet de la hauteur de la zone fondue sur le régime d'écoulement dans une cavité de Bridgman verticale inverse (croissance cristalline)

Khalid ACHOUBIR<sup>1,2</sup>, Abdelkhalek CHEDDADI<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup> Equipe « Systèmes Thermiques », Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Université Mohamed V-Agdal, B.P. 765, Rabat

<sup>2</sup> Ecole Supérieure de Technologie, Université Mohamed V-Agdal, Sortie des Arcs, Salé  
achoubir@hotmail.com, cheddadi@emi.ac.ma

**Résumé :** Dans ce travail, on considère les écoulements générés au cours du procédé de croissance cristalline de Bridgman-Stockbarger où les transferts étudiés sont d'origine thermique. L'investigation porte sur l'impact du changement de la hauteur du domaine occupé par la phase liquide sur les différents modes d'écoulement générés par la convection. Pour des hauteurs plus petites que la largeur de la cavité, l'écoulement devient instationnaire pour des nombres de Rayleigh d'autant plus faibles que cette hauteur croît. La corrélation  $Ra_T = 3.512 \cdot 10^5 (1.576 \cdot 10^{-2})^{(h_{cr}-0.25)}$  est proposée pour évaluer la valeur de la hauteur adimensionnelle critique caractérisant le passage en mode instationnaire, pour une valeur donnée du nombre de Rayleigh thermique.

Mots-clés : Convection naturelle, Cavité de Bridgman, Multiplicité des solutions, Effet du rapport de forme.

### 1. Introduction :

L'étude de la convection dans la phase liquide au cours de la solidification ne cesse de susciter l'intérêt des travaux de recherche [1,2]. Dans le présent travail, on s'intéresse précisément à la cavité de Bridgman Verticale Inverse (IBV) [3], où le moteur de l'écoulement est constitué par les gradients thermiques vertical et horizontal. Sachant que la convection influence notablement la qualité du produit résultant de la solidification [4], l'étude de l'effet des différents paramètres de contrôle agissant sur cette convection s'avère donc être primordiale.

Au cours de la solidification, l'espace occupé par la phase liquide dans une cavité de Bridgman passe d'un rectangle de hauteur égale à celle de la cavité initiale à une hauteur nulle à la fin de la solidification. Par conséquent, comprendre l'effet de la hauteur occupée par la phase liquide sur la convection sera certainement utile à la compréhension du développement de la convection tout au cours de la solidification. C'est l'objet de notre étude.

### 2. Modèle et approximations numériques

Le fluide confiné dans la cavité de Bridgman est supposé Newtonien, incompressible et en écoulement laminaire. Les propriétés thermophysiques sont constantes sauf la densité qui est approchée dans le terme de gravité par l'hypothèse de Boussinesq :

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta_T (T' - T'_0)] \quad (1)$$

où  $T'_0$  est la température de référence.

Les variables adimensionnelles sont définies par :

$$(x, z) = \left( \frac{x'}{L_{ref}}, \frac{z'}{L_{ref}} \right); t = \alpha \frac{t'}{L_{ref}^2};$$

$$(u, v) = (L_{ref} \frac{u'}{\alpha}, L_{ref} \frac{v'}{\alpha}), T = \frac{T' - T'_0}{\Delta T}.$$

avec :  $\Delta T = T'_C - T'_F$  et  $L_{ref}$  la longueur de référence.

Le mouvement du fluide est gouverné par les équations de conservation qui s'écrivent sous forme adimensionnelle en formulation ( $\Omega$ - $\Psi$ ) Vorticité - Fonction de courant [5]:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + w \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \text{Pr} \nabla^2 \Omega - Ra_T \text{Pr} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \nabla^2 T \quad (3)$$

$$\Omega = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4)$$

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (5)$$

$$w = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (6)$$

Avec :  $Ra_T = \frac{g \beta_T \Delta T L_{ref}^3}{\nu \alpha}$  et  $\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$ .

L'adimensionnalisation adoptée est de type thermique, la longueur de référence  $L_{ref}$  est prise égale à la largeur de la cavité et la vitesse de référence égale à  $\frac{\alpha}{L_{ref}}$ .

Ces équations sont résolues numériquement par la méthode des différences finies pour les variables Fonction de courant et Vorticité. Pour la température, une technique de volumes finis est utilisée. La discrétisation des équations est effectuée à l'aide d'une méthode de différences finies centrées d'une précision de deuxième ordre en espace. Le schéma de la méthode ADI est adopté pour la résolution du système obtenu. La convergence des calculs est déclarée pour une valeur maximale de variation relative de toutes les variables, en chaque point du maillage, inférieure à  $10^{-5}$ .

### 3. Configuration

Le procédé de solidification dirigée par la technique de Bridgman est composé principalement de trois zones thermiques entourant une ampoule cylindrique au sein de laquelle le métal liquide est solidifié. L'un des avantages de cette technique de refroidissement est la commodité de certains de ses paramètres de contrôle. Ces paramètres sont représentés sous une forme adimensionnelle par : Le nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T$ , le nombre de Prandtl  $Pr$  (fixé dans notre étude à 0.01), l'allongement de la cavité :  $h = \frac{H}{L}$ , où  $H$  désigne la hauteur dimensionnelle, et la longueur adimensionnelle de la zone adiabatique, ici prise constante et égale à 0.25.

La configuration bidimensionnelle étudiée dans ce travail est présentée dans la figure 1. Elle est définie de façon à ce qu'elle soit proche du cas réel du procédé de croissance cristalline de Bridgman inverse.

Les conditions aux limites sont données par:

$$T = 1 \text{ pour : } y = 0 ; x = 0, 1 \text{ et } y \in [0, (h - 0.25)]$$

$$T = 0 \text{ pour : } y = h$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ pour : } x = 0, 1 \text{ et } y \in [(h - 0.25), h]$$

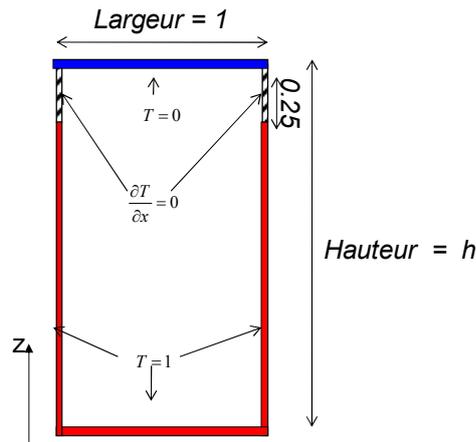


Fig.1 : Configuration de Bridgman Verticale Inverse

## 4. Résultats et discussion

### 4-1 Modes d'écoulement

Au cours de la solidification dans une cavité de Bridgman, l'espace occupé par la phase liquide passe d'une hauteur qui est celle de l'ensemble de la cavité au démarrage de la solidification à une hauteur nulle à la fin de la solidification. Pour  $Ra_T = 10^4$ , l'effet de cette hauteur sur l'écoulement induit a déjà été illustré [6].

Pour les grandes valeurs de la hauteur  $h$ , nous avons remarqué que l'écoulement bifurque vers des régimes multicellulaires même pour des valeurs petites de  $Ra_T$ . Les oscillations dans cet écoulement traduisent une compétition entre une série de cellules superposées et ascendantes où la cellule en haut disparaît au détriment de l'apparition d'une nouvelle cellule en bas (Fig.2).

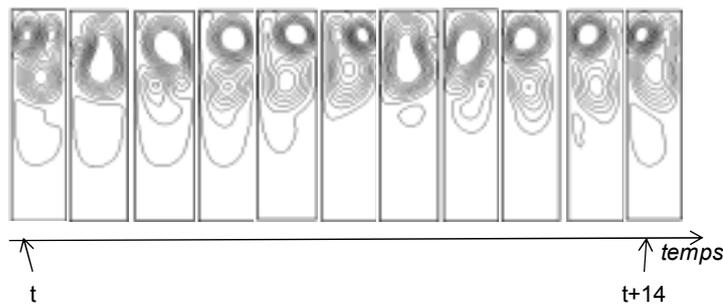


Fig.2 : Evolution des lignes de courant en régime instationnaire ( $Ra_T=5000$ ,  $h = 4$ )

Dans la suite, on va s'intéresser aux changements du mode d'écoulement pour des valeurs de  $h$  relativement faibles (inférieures à 1.5). L'étude de l'effet de  $h$  sur l'intensité maximale pour différentes valeurs de  $Ra_T$  montre qu'on peut distinguer trois cas (Fig.3) :

\* Pour les valeurs de  $Ra_T$  faibles (inférieures à  $10^4$ ), l'écoulement présente une valeur de  $\Psi_{max}$  optimale, de 0.8 pour  $Ra_T = 5 \cdot 10^3$  et 0.67 pour  $Ra_T = 10^4$  par exemple. En effet, pour les faibles valeurs de  $h$  l'écoulement est symétrique avec deux cellules contrarotatives. La faiblesse de la hauteur ne permet pas que ces cellules interagissent entre elles. L'augmentation progressive de  $h$  se traduit par une augmentation de l'intensité d'écoulement, et lorsque la hauteur  $h$  atteint la valeur correspondant à  $\Psi_{max}$  optimale, les cellules sont

suffisamment intenses et donc interagissent entre elles ce qui donne lieu à un changement de régime. Augmenter davantage  $h$  va finalement donner lieu à un régime oscillatoire au-delà d'une valeur critique de  $h$  que nous nommons  $h_{cr}$  (Fig.3a).

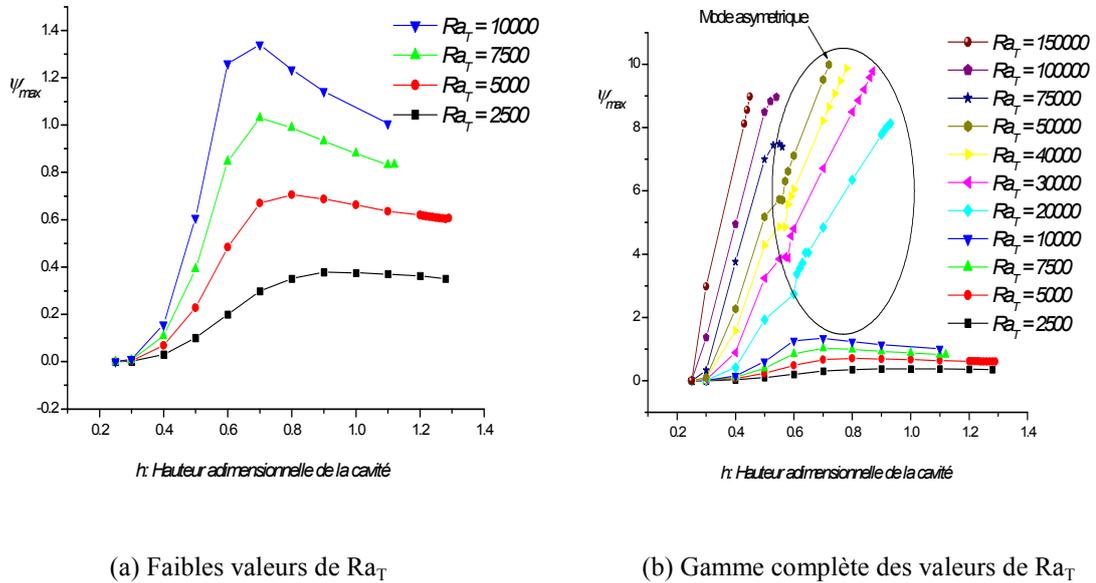


Fig.3 :  $\Psi_{max}$  en fonction de la hauteur de la cavité (mode d'écoulement stationnaire)

\* Pour des valeurs moyennes de  $Ra_T$  (comprises entre  $2 \cdot 10^4$  et  $5 \cdot 10^4$ ), les cellules interagissent entre elles, et au lieu de la diminution de l'intensité de l'écoulement cette dernière continue d'augmenter lorsque  $h$  augmente. En fait, dans ce cas, les interactions entre cellules vont faire bifurquer l'écoulement vers un mode asymétrique monocellulaire stationnaire (Fig.3b). Ces écoulements monocellulaires sont fortement convectifs. Au-delà d'une hauteur critique  $h_{cr}$ , l'écoulement bifurque vers un régime asymétrique monocellulaire transitoire.

\* Pour des valeurs élevées de  $Ra_T$  (supérieures à  $5 \cdot 10^4$ ), l'augmentation de  $h$  montre que l'interaction entre les deux cellules contrarotatives va donner lieu directement à un écoulement asymétrique monocellulaire instationnaire, sans passage par le mode asymétrique monocellulaire stationnaire (Fig.3b).

#### 4-2 Bifurcation vers les régimes instationnaires

Comme il vient d'être constaté, à partir d'une valeur critique  $h_{cr}$ , de la hauteur  $h$ , dépendant de la valeur du nombre de Rayleigh  $Ra_T$ , l'écoulement bifurque vers un régime transitoire. Nous savons par ailleurs que cette convection influence notablement la qualité du produit résultant de la solidification [4], d'où l'utilité de chercher une relation entre  $h_{cr}$  et  $Ra_T$ . La corrélation ci-dessous (7) proposée est ajustée en se basant sur la méthode des moindres carrés, le coefficient de corrélation relatif à cette approximation est de 0.995.

$$Ra_T = 3.512 \cdot 10^5 (1.576 \cdot 10^{-2})^{(h_{cr}-0.25)} \quad (7)$$

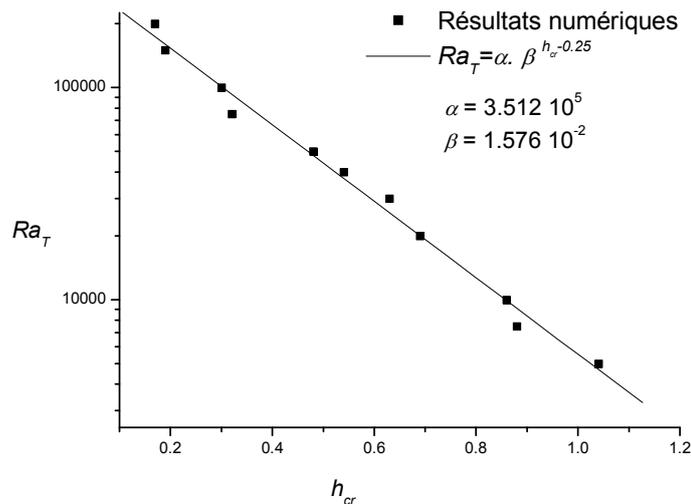


Fig.4 : Corrélation entre  $h_{cr}$  et  $Ra_T$

## 5. Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié numériquement l'effet de la hauteur sur le régime d'écoulement dans une cavité de Bridgman verticale inverse. L'investigation numérique montre que l'écoulement présente moins de stabilité lorsque la hauteur dépasse la largeur de la cavité correspondant au démarrage de la solidification. Ici, nous avons étudié surtout les hauteurs faibles. Nous avons démontré l'effet de compétition entre les deux cellules issues du mode d'écoulement symétrique sur la bifurcation vers un régime monocellulaire. Cette instabilité se traduit par des oscillations au niveau de l'intensité de l'écoulement. Une corrélation a été établie pour déterminer la hauteur critique correspondant à l'apparition des oscillations, en fonction de  $Ra_T$ .

## Nomenclature

$g$  : accélération gravitationnelle,  $m.s^{-2}$ .  
 $h$  : hauteur adimensionnelle.  
 $Pr$  : nombre de Prandtl.  
 $Ra_T$  : nombre de Rayleigh thermique.  
 $t$  : temps adimensionnel.  
 $T$  : température adimensionnelle.  
 $u$  : vitesse suivant la direction  $x$ .  
 $w$  : vitesse suivant la direction  $z$ .  
 $x, z$  : coordonnées cartésiennes,  $m$ .

## Symboles grecs

$\alpha$  : diffusivité thermique,  $m^2.s^{-1}$ .  
 $\beta$  : coefficient d'expansion thermique,  $K^{-1}$ .  
 $\nu$  : viscosité cinématique,  $m^2.s^{-1}$ .  
 $\rho$  : masse volumique,  $kg.m^{-3}$ .  
 $\psi$  : fonction de courant.  
 $\Omega$  : vorticité.

## Indices

$C$  : chaud.  
 $F$  : froid.  
 $T$  : thermique  
 $cr$  : critique

## Références

- [1] K. Achoubir, R. Bennacer R., A. Cheddadi, M. El Ganaoui and E. Semma, Numerical Study of Thermosolutal Convection in Enclosures Used for Directional Solidification (Bridgman Cavity); *FDMP*, vol.142, no.1, 1-11, (2008).
- [2] M. G. Kim, G.O. Kim and B.K. Park: Numerical Study on the Vertical Bridgman Crystal Growth with Thermosolutal Convection, *KSME International Journal*, Vol. 15 No.8, 1188-1195 (2001).
- [3] B. A. Robert, Theory of transport processes in single crystal growth from the melt, *AICHE Journal*, Volume 34, Issue 6, 881 – 911, (1988).
- [4] G. Muller, *Convection and Inhomogeneities in Crystal Growth from the Melt. Crystal; Growth, Properties and Applications*. Springer, Berlin (1988).
- [5] P.J. Roache, *Computational Fluid Dynamics*, Albuquerque (1976).

[6] K. Achoubir et A. Cheddadi,: Convection thermique au cours de la croissance cristalline en Bridgman verticale ; *RMAT*, Vol. 2, 4. 295-301 (2011).