16èmes Journées Internationales de Thermique (JITH 2013)
Marrakech (Maroc), du 13 au 15 Novembre, 2013

Fontaines et panaches faibles non-Boussinesq en milieu stratifié

Rabah Mehaddi[1], Olivier Vauquelin[1], Fabien Candelier[1]
[1] Laboratoire IUSTI, UMR CNRS 7343, Aix-Marseille Université
5 rue Enrico Fermi, 13 453 Marseille cedex 13, France.
Rabah.Mehaddi@etu.univ-amu.fr

Résumé : Dans ce papier nous traitons théoriquement les fontaines et panaches faibles, turbulents et non-Boussinesq se développant verticalement dans un milieu stratifié. Le modèle théorique mis en place permet d'obtenir l'évolution verticale des valeurs moyennes des variables primaires (vitesse, rayon et déficit de masse volumique) du panache ou de la fontaine. Il permet également d'obtenir une expression analytique de la hauteur atteinte par ces rejets.

Mots clés : Panache, Fontaine, Stratification, Non-Boussinesq

1. Introduction

Un écoulement de type « fontaine » se produit lorsqu'un fluide lourd est injecté du bas vers le haut dans un milieu plus léger. Dans cette situation, la flottabilité du rejet s'oppose à sa quantité de mouvement ce qui réduit la vitesse locale de la fontaine jusqu'à ce qu'elle s'arrête à une certaine hauteur. Dans le cas d'un milieu homogène, la hauteur de la fontaine est principalement fonction du nombre de Froude qui représente le ratio entre flottabilité et quantité de mouvement. Dans le cas d'un milieu stratifié, la hauteur de la fontaine est fonction du nombre de Froude et de la stratification ambiante dont l'influence principale est de réduire cette hauteur. Pour le panache (injection d'un fluide léger du bas vers le haut dans un milieu plus lourd), la situation est différente puisque le rejet à une densité inferieur a celle du milieu ambiant, ce qui implique que la flottabilité reste toujours positive si le milieu ambiant est homogène. Cependant, en cas de stratification, la différence de masse volumique entre le panache et le milieu ambiant diminue progressivement jusqu'à s'annuler à une certaine hauteur, qu'on appelle hauteur de transition. Au delà de cette hauteur, la flottabilité devient négative, ce qui implique une transformation de l'écoulement de type panache en écoulement de type fontaine (voir Figure 1).

Ces écoulements connaissent énormément d'applications dans le domaine industriel comme la ventilation des bâtiments ou le désenfumage des locaux fermés ainsi que dans le domaine environnemental comme les éruptions volcaniques et la dispersion marine ou atmosphérique des polluants.

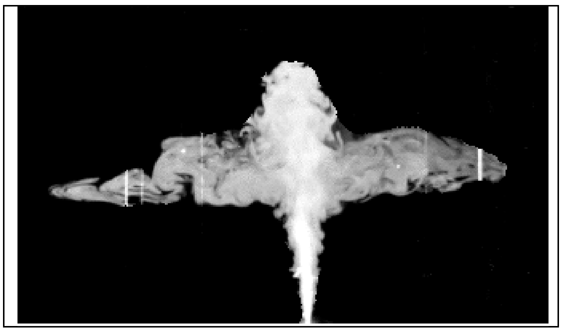

Figure 1 : Panache en milieu stratifié

Les fontaines peuvent être classées en trois catégories principales selon leur dynamique. La première catégorie est celle des fontaines forcées dont la quantité de mouvement initiale est plus forte que la force de flottabilité ($Fr > 3$). La deuxième catégorie est celle des fontaines faibles où la force de flottabilité est du même ordre que la quantité de mouvement initiale ($3 > Fr > 1$). La dernière catégorie considère le cas où la force de flottabilité est plus grande que la quantité de mouvement ($Fr < 1$). Kaye et Hunt [1] ont montré que la hauteur d'une fontaine faible est indépendante du coefficient d'entrainement, ce qui implique que le débit volumique est conservé. Cette physique a été étendue pas Mehaddi, Vauquelin et Candelier [2] pour le cas de fontaines en milieu stratifié. Mehaddi, Candelier et Vauquelin [3] ont montré que dans le cas des panaches faibles, même s'ils vérifient l'hypothèse de Boussinesq initialement, on peut sortir assez nettement du cadre de cette hypothèse au cours de leurs évolutions verticales, ce qui nous impose de mettre en place un modèle non-Boussinesq pour ces régimes particuliers.

Sur la base de ces observations, nous proposons ici d'établir un modèle théorique basé sur les équations de Morton [4] permettant d'exprimer la hauteur d'une fontaine et d'un panache faible non-Boussinesq en milieu stratifié. Nous commencerons tout d'abord par traiter la fontaine et le jet (flottabilité initiale nulle) ensuite, nous étendrons simplement la méthode pour traiter le cas du panache.

2. Hauteur de fontaine et de jet en milieu stratifié

Les équations de conservation de la masse, du débit de flottabilité et de la quantité de mouvement s'écrivent comme suit :

$$\frac{d(ub^2)}{dz} = 2u_e b \, , \tag{1}$$

$$\frac{d(\rho u b^2)}{dz} = 2\,\rho_0 u_e b \, , \tag{2}$$

$$\frac{d(\rho u^2 b^2)}{dz} = -(\rho - \rho_0) g b^2 \, . \tag{3}$$

Ou u est la vitesse moyenne de la fontaine à une altitude z, b est le rayon de la fontaine, u_e est la vitesse d'entrainement, ρ la densité moyenne de la fontaine et ρ_0 la densité du milieu ambiant qui est fonction de z.

Comme nous l'avons vu, dans le cas de fontaines faibles le débit volumique est conservé, donc nous pouvons négliger la vitesse d'entrainement u_e. Pour ce faire, nous posons $\alpha = 0$. Apres substitutions dans les équations du mouvement nous obtenons :

$$ub^2 = Q = Q_i \, , \tag{4}$$

$$\rho = \rho_i \, . \tag{5}$$

Où Q est le débit volumique du fluide dans la fontaine à une hauteur z. Notons que l'indice i désigne la valeur à la source.

Dans la suite nous considérerons une stratification linéaire du milieu ambiant :

$$\rho_0 = \rho_{ref}(1 - N^2 z) \, . \tag{6}$$

Avec N^2 la fréquence de Brunt-Väisälä.

En remplaçant les équations (4), (5) et (6) dans les équations de conservations (1), (2) et (3) et en prenant en compte le fait que $\alpha = 0$, nous obtenons :

$$u\frac{du}{dz} = -g(N'^2 z + \eta_i) \, . \tag{7}$$

Où $N'^2 = \frac{\rho_{ref}}{\rho_i} N^2$ et $\eta_i = (\rho_i - \rho_{ref})/\rho_i$.

Nous obtenons finalement pour la vitesse moyenne, l'équation d'évolution suivante :

$$u = \left(-z^2 g N'^2 - 2g\eta_i + u_i^2\right)^{\frac{1}{2}} . \tag{8}$$

La hauteur de la fontaine H est définie comme le lieu ou la vitesse moyenne u s'annule, alors nous obtenons donc :

$$\frac{H}{b_i} = \frac{Fr}{\sigma_i}\left(\sqrt{1+\ \sigma_i} - 1\right), \qquad (9)$$

où le nombre de Froude et le paramètre de stratification sont défini par les relations ci-dessous :

$$Fr = \frac{u_i^2}{g b_i \eta_i} \quad et \quad \sigma_i = \frac{N'^2 u_i^2}{g \eta_i^2}.$$

Nous remarquons que dans la région asymptotique ($\sigma_i \gg 1$), la relation est similaire à celle d'une fontaine Boussinesq.

Pour le cas du jet, la différence de densité initiale est nul, ceci implique que le nombre Fr et le paramètre de stratification σ_i tendent vers l'infini. Nous obtenons alors :

$$\frac{H}{b_i} = \frac{u_i}{g^{\frac{1}{2}} b_i N}. \qquad (10)$$

3. Hauteur de panache en milieu stratifié

Pour le cas du panache nous reprenons les mêmes équations, à la différence près que l'écoulement est séparé en deux zones, la première est une zone de flottabilité positive (panache) et la seconde est une zone de flottabilité négative (fontaine).Les équations de conservations sont :

$$\frac{d(ub^2)}{dz} = 0, \qquad (11)$$

$$\frac{d(\rho u b^2)}{dz} = 0, \qquad (12)$$

$$\frac{d(\rho u^2 b^2)}{dz} = (\rho_0 - \rho) g b^2. \qquad (13)$$

La hauteur de transition est définie comme le lieu où la différence de densité s'annule. De façon analogue au cas de la fontaine, nous pouvons obtenir la hauteur de transition comme suit :

$$\frac{H_t}{b_i} = \frac{Fr}{\sigma_i}. \qquad (14)$$

Les valeurs de la vitesse et du rayon au niveau de la zone de transition sont :

$$\frac{b_t}{b_i} = \left(1 + \frac{1}{\sigma_i}\right)^{-\frac{1}{4}} \quad et \quad \frac{u_t}{u_i} = \left(1 + \frac{1}{\sigma_i}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (15)$$

Au delà de la zone de transition, l'écoulement peut être considéré comme un jet se développant en milieu stratifié, donc la hauteur peut être obtenue en considérons que les variables initiales du jet sont confondues avec celle de la zone de transition. En remplaçons (14) dans (9), nous obtenons :

$$\frac{H_f}{b_i} = \frac{(1+\sigma_i)^{\frac{3}{4}} Fr}{\sigma_i^{\frac{1}{2}}}. \qquad (15)$$

Finalement la hauteur totale du panache est obtenue en sommant la hauteur de la zone de flottabilité positive avec celle de la partie à flottabilité négative. En particulier quand $\sigma_i \gg 1$, la hauteur finale peut être exprimer comme suit :

$$\frac{H}{b_i} = \frac{H_t + H_f}{b_i} \approx \frac{Fr}{\sigma_i^{\frac{1}{2}}}. \qquad (16)$$

4. Conclusion

Dans ce papier nous avons traité théoriquement le cas d'un panache et d'une fontaine non-Boussinesq en milieu stratifié. La hauteur de la fontaine a été obtenue en fonction du nombre de Froude et du paramètre de stratification défini à la source. Afin d'adapter les résultats obtenus ici à l'étude d'une fontaine thermique pour une application à la thermique de l'habitat par exemple, il suffit de considérer la stratification thermique et convertir le déficit de masse volumique en un déficit de température. Ceci peut être fait dans le cadre de l'hypothèse des gaz parfaits à partir de la relation suivante :

$$\frac{T_0 - T}{T_0} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho}. \qquad (17)$$

Références

[1] N.B. Kaye & G. R. Hunt, Weak fountains, *J. Fluid Mech*. 558, pp 319-328, 1957.
[2] R. Mehaddi, O.Vauquelin, F. Candelier, Analytical solutions for turbulent Boussinesq fountains in a linearly stratified environment, *J. Fluid Mech*. 691, pp 487-497, 2012.
[3] R. Mehaddi, F. Candelier, O.Vauquelin, Naturally bounded plumes, *J. Fluid Mech*. 717, pp 472-483, 2013.
[4] B.R. Morton, G.I. Taylor, J.S. Turner, Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneaous sources, *Proc. R. Soc. Lond.*A 234, pp 1-23, 1956.