17èmes Journées Internationales de Thermique (JITH 2015)
*Marseille (France), 28 - 30 Octobre 2015*

# Etude analytique des écoulements naturels laminaires induits par la génération interne de chaleur dans les cavités allongées inclinées

Lahcen EL MOUTAOUAKIL, Zaki ZRIKEM et Abdelhalim ABDELBAKI

*Université Cadi Ayyad, Faculté des Sciences Semlalia, LMFE (CNRST-URAC 27)*
*B.P.2390, Marrakech, Maroc.*
*Lahcen1873@gmail.com*, ***zrikem@uca.ma,*** *abdelbaki@uca.ma*

**Résumé :** Ce travail est dédié au développement d'une solution analytique pour la convection naturelle laminaire bidimensionnelle induite par une génération interne de chaleur dans une cavité inclinée très allongée. La chaleur volumique uniforme dégagée au sein du domaine est évacuée à travers les deux parois latérales sur lesquelles des flux de chaleur constants, mais qui peuvent être différents, sont imposés. La solution analytique développée est basée sur l'approximation des écoulements parallèles. La validité de la solution analytique est vérifiée par les résultats des simulations numériques effectuées sur une cavité inclinée suffisamment allongée ($A \geq A_l$). Les résultats obtenus ont montré que pour $A_l = 5$ et $Pr \geq 0.1$, les prédictions analytiques obtenues sont en parfait accord avec celles numériques trouvées au milieu de la cavité. Les résultats analytiques et numériques sont aussi exploitées pour discuter l'effet du nombre de Rayleigh ($10^3 \leq Ra \leq Ra_l$), de l'angle d'inclinaison ($15° \leq \phi \leq 165°$) et du rapport des flux ($0 \leq r \leq 2$) sur la structure de l'écoulement et le champ thermique dans le domaine. Au milieu de la cavité, on a obtenu des champs thermique et dynamique qui sont indépendants de A et Pr, mais fortement influencés par les paramètres Ra, r et $\phi$.

**Mots clés** : Cavité allongée inclinée, génération interne de chaleur, convection naturelle, solution analytique, écoulement parallèle, rapport des flux.

## 1. Introduction

La convection naturelle induite par une génération interne de chaleur au sein d'un fluide confiné dans une enceinte, se produit dans plusieurs systèmes naturels et industriels. Pour les écoulements naturels induits par la génération interne de chaleur dans des cavités, les travaux numériques effectués sont nombreux [1-6], mais ceux analytiques sont rares [7,8]. Daniels et Jones [7] ont proposé une solution semi-analytique pour une cavité rectangulaire, de différents rapports de forme, dont toutes les parois ou seulement celles verticales (parois horizontales adiabatiques) sont maintenues isothermes. Les équations gouvernantes ont été exprimées à partir d'une formulation fonction de courant-vorticité, puis réduites à des équations bi-harmoniques qui sont par la suite résolues. Récemment, An et al. [8] ont utilisé la technique de la transformation intégrale généralisée pour développer une solution hybride (analytique-numérique) pour la convection naturelle dans une cavité carrée non inclinée. Au sein de la cavité il y a une génération volumique uniforme de chaleur évacuée à travers les quatre parois, ou seulement celles verticales de la cavité, maintenues à des températures froides.

Les solutions analytiques, basées sur l'approximation d'écoulement parallèle, n'ont pratiquement pas été exploitées, lorsqu'elles sont valides, pour le cas de la convection naturelle induite par une génération interne de chaleur au sein d'un fluide de nombre de Prandtl $Pr \geq 0.1$. Pourtant cette technique a été largement utilisée pour les cavités allongées soumises à des flux de chaleur uniformes. Les configurations traitées, avec ou sans double diffusion, concernent des milieux fluides [9-11] ou poreux [12-14] sans génération volumique de chaleur.

Ce travail est une extension des travaux qui ont développé des solutions analytiques, basées sur l'approximation de l'écoulement parallèle, pour la convection naturelle laminaire stationnaire dans une cavité soumise à des flux de chaleur uniformes. Cette extension consiste à considérer qu'en plus, il y a une génération volumique uniforme de chaleur qui est évacuée d'une manière asymétrique par les parois latérales d'une cavité inclinée très allongée.

La solution analytique, n'est précise qu'à partir d'un rapport de forme limite $A_l$, qui est déterminé en fonction de l'inclinaison de la cavité $\phi$, du nombre de Prandtl Pr et du rapport r des flux de chaleur évacués. Les résultats numériques des équations de conservation complètes sont pris comme référence pour déterminer les limites de validité de la solution analytique en fonction de A, r, Pr, $\phi$ et $Ra \leq Ra_l$ ($Ra_l$ valeur limite du régime laminaire). En plus, les effets de A, $Ra \leq Ra_l$, $15° \leq \phi \leq 165°$, $0 \leq r \leq 2$ et $Pr \geq 0.1$ sur les caractéristiques de l'écoulement sont analysés à partir des prédictions analytiques et numériques.

## 2. Formulation mathématique

On s'intéresse aux écoulements naturels laminaires bidimensionnels et stationnaires dans une cavité de rapport de forme trop élevé A ($A = H/L >> 1$) et inclinée d'un angle $\phi$ ($15° \leq \phi \leq 165°$) (Figure 1). La cavité, remplie d'un fluide non métallique ($Pr \geq 0.1$) est le siège d'une génération volumique uniforme de chaleur $q'(W/m^3)$. La chaleur générée est évacuée à travers les parois latérales de longueur H puisque celles de largeur L sont supposées adiabatiques. Pour un refroidissement symétrique, chaque paroi active dégage un flux de chaleur $q = q'L/2$, pris comme référence. En général, la cavité est refroidie par des flux de chaleur imposés sur les parois actives, qui peuvent s'exprimer en fonction de q par $q_1 = rq$ (paroi 1 à gauche) et par $q_2 = sq$ (paroi 2 à droite), de sorte que $q_1 + q_2 = q'L = (r + s)q$. Ainsi, le rapport de flux de chaleur r est varié de sorte que $r + s = 2$, ce qui donne $0 \leq r \leq 2$ et $0 \leq s \leq 2$. Donc, pour $r = 0$ ($s = 2$) ou $r = 2$ ($s = 0$), l'une des deux parois latérales est adiabatique, alors que le refroidissement est symétrique pour $r = s = 1$ et asymétrique pour $r = 2 - s \neq 1$.

A noter que les résultats correspondants à ($r, \phi \leq 90°$) sont identiques à ceux pour ($s = 2 - r, 180° - \phi$), donc on peut limiter l'étude à $15° \leq \phi \leq 90°$. Pour que l'écoulement naturel reste laminaire et stationnaire, $q'$ est varié de sorte à ce que le nombre de Rayleigh, basé sur la largeur L de la cavité $Ra = g\beta qL^4/\nu\alpha k$, varie de $10^3$ à $Ra_l$. Selon l'angle d'inclinaison considérée, le nombre de Rayleigh limite $Ra_l$ peut atteindre $10^5$ si $\phi < 30°$ et $10^6$ si $\phi \geq 30°$.

Avec les expressions adoptées pour les flux de chaleur $q'$, $q_1$ et $q_2$ en fonction de q, r et s, il est facile d'ajuster les équations gouvernantes et la solution analytique, exposées ci-dessous, au cas d'une cavité inclinée ($15° \leq \phi \leq 90°$) sans génération interne de chaleur. En effet, il suffit de poser dans les différentes expressions $r = -s = -1$, ce qui donne $q' = 0$ ($r + s = 0$) pour une cavité soumise à un flux q en $X = -0.5$ qui est évacué en $X = 0.5$.

Les équations de conservation qui régissent le problème sont établies en supposant que le fluide est Newtonien et incompressible. La dissipation visqueuse et le rayonnement thermique sont aussi considérés négligeables. Les propriétés thermophysiques du fluide sont prises constantes alors que l'approximation de Boussinesq est adoptée pour tenir compte des variations de la masse volumique avec la température du fluide dans le terme de poussée.

En terme de la fonction de courant $\psi(X, Y)$, les équations de conservation adimensionnelles en régime stationnaire sont :

$$J(\psi, \nabla^2\psi) = Pr\nabla^4\psi - RaPr\left(\frac{\partial\theta}{\partial X}\sin(\phi) + \frac{\partial\theta}{\partial Y}\cos(\phi)\right) \quad (1)$$

$$J(\psi, \theta) = \nabla^2\theta + r + s \quad (2)$$

L'opérateur J est donné par : $J(f, g) = \partial f/\partial X.\partial g/\partial Y - \partial g/\partial X.\partial f/\partial Y$

Pour la fonction $\psi$, les conditions aux limites imposées sur les parois sont :

$$\psi = \partial\psi/\partial n = 0 \quad (3)$$

Où $n = X$ au niveau des parois actives et Y au niveau de celles passives.

Pour la température $\theta$, les conditions aux frontières du domaine sont :

Sur les parois actives :

$$\left[\frac{\partial\theta}{\partial X}\right]_{X=-0.5} = r \text{ et } \left[\frac{\partial\theta}{\partial X}\right]_{X=0.5} = -s \quad (4)$$

Sur les parois adiabatiques :

$$\left[\frac{\partial\theta}{\partial Y}\right]_{Y=-0.5A \text{ ou } 0.5A} = 0 \quad (5)$$

Pour un écoulement bidimensionnel, les composantes U et V sont obtenues à partir de $\psi$ :

$$U = \frac{\partial\psi}{\partial Y} \quad \text{et} \quad V = -\frac{\partial\psi}{\partial X} \quad (6)$$

Les variables adimensionnelles sont obtenues à partir de celles dimensionnelles à partir :

$$X = \frac{x}{L}, Y = \frac{y}{L}, U = \frac{uL}{\alpha}, V = \frac{vL}{\alpha}, \theta = \frac{(T - T_0)k}{qL}, \tau = \frac{t\alpha}{L^2} \text{et } P = \frac{p}{\rho\left(\frac{\alpha}{L}\right)^2} \quad (7)$$

$T_0$ est la température au milieu de la cavité: $T_0 = T(0,0)$ ($\theta(0,0) = 0$).

Pour les cavités à rapports de forme assez élevés ($A >> 1$), il est possible de développer une solution analytique basée sur l'approximation de l'écoulement parallèle. Cette approximation consiste à considérer que dans la partie centrale de la cavité, l'écoulement est parallèle aux parois actives, ce qui se traduit par une vitesse $U(X,Y) \approx 0$. Ainsi l'équation (6) devient :

$$V(X,Y) = V(X) \text{ et } \psi(X,Y) = \psi(X) \tag{8}$$

En tenant compte de (3) et (8), la solution de l'équation (1) est :

$$\psi(X) = \frac{\left(\frac{s-r}{2C_T} - \text{cotan}(\phi)\right)\left[(1+\chi_1)\cos(\eta X)\cosh(\eta X) + (1-\chi_1)\sin(\eta X)\sinh(\eta X)\right]}{\left((1+\chi_1)\cos\left(\frac{\eta}{2}\right)\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) + (1-\chi_1)\sin\left(\frac{\eta}{2}\right)\sinh\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)} + \frac{\frac{r+s}{2C_T}\left[(\zeta_1-\zeta_2)\sin(\eta X)\cosh(\eta X) + (\zeta_1+\zeta_2)\cos(\eta X)\sinh(\eta X)\right]}{(1-\chi_2)\sin\left(\frac{\eta}{2}\right)\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) - (1+\chi_2)\cos\left(\frac{\eta}{2}\right)\sinh\left(\frac{\eta}{2}\right)} + \text{cotan}(\phi) + \frac{0.5(r-s)-(r+s)X}{C_T} \tag{9}$$

Les grandeurs $\chi_1, \chi_2, \zeta_1, \zeta_2$ et $\eta$ de l'expression (9) s'expriment comme suit :

$$\chi_1 = \tanh\left(\frac{\eta}{2}\right)\text{cotan}\left(\frac{\eta}{2}\right), \chi_2 = \tanh\left(\frac{\eta}{2}\right)\tan\left(\frac{\eta}{2}\right),$$
$$\zeta_1 = \frac{\left[\tan\left(\frac{\eta}{2}\right) - \tanh\left(\frac{\eta}{2}\right)\right]}{\eta} - \chi_2, \zeta_2 = \frac{\left[\tan\left(\frac{\eta}{2}\right) + \tanh\left(\frac{\eta}{2}\right)\right]}{\eta} - 1 \text{ et } \eta = \left(\frac{Ra.\sin(\phi)C_T}{4}\right)^{1/4} \tag{10}$$

$C_T$ le coefficient de la stratification thermique:

$$C_T = \frac{\partial\theta}{\partial Y} \tag{11}$$

En utilisant l'égalité (6), on trouve l'expression de $V(X)$ en $Y = 0$ :

$$V(X) = 2\eta\frac{\left(\frac{s-r}{2C_T} - \text{cotan}(\phi)\right)\left[\chi_1\sin(\eta X)\cosh(\eta X) - \cos(\eta X)\sinh(\eta X)\right]}{((1+\chi_1)\cos(\eta/2)\cosh(\eta/2) + (1-\chi_1)\sin(\eta/2)\sinh(\eta/2))} + \frac{\frac{(r+s)\eta}{C_T}\left[\zeta_1\cos(\eta X)\cosh(\eta X) - \zeta_2\sin(\eta X)\sinh(\eta X)\right]}{(\chi_2-1)\sin\left(\frac{\eta}{2}\right)\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) + (1+\chi_2)\cos(\eta/2)\sinh(\eta/2)} + \frac{r+s}{C_T} \tag{12}$$

En tenant compte de (4) et (8), la solution de l'équation (2) en $Y = 0$ est :

$$\theta_h(X) = \frac{\frac{(0.5(r-s) + C_T\text{cotan}(\phi))}{\eta}\left[\sin(\eta X)\cosh(\eta X) + \chi_1\cos(\eta X)\sinh(\eta X)\right]}{\left((1+\chi_1)\cos\left(\frac{\eta}{2}\right)\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) + (1-\chi_1)\sin\left(\frac{\eta}{2}\right)\sinh\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)} - \frac{\frac{r+s}{2\eta}\left[\zeta_1\sin(\eta X)\sinh(\eta X) + \zeta_2(\cos(\eta X)\cosh(\eta X) - 1)\right]}{(1-\chi_2)\sin(\eta/2)\cosh(\eta/2) - (1+\chi_2)\cos(\eta/2)\sinh(\eta/2)} - XC_T\text{cotan}(\phi) \tag{13}$$

La température en une hauteur Y donnée de la cavité est:

$$\theta(X,Y) = \theta_h(X) + C_T Y \tag{14}$$

En utilisant (2) et (5), on trouve l'expression ci-dessous qui permet de déterminer $C_T$ :

$$
\begin{aligned}
C_T = &-\frac{1}{4\eta C_T}\Big(0.5(r-s) \\
&+ C_T\mathrm{cotan}(\phi)\Big)^2 \frac{\left\{\left(\chi_1^2-2\chi_1-1\right)\sin(\eta)\cosh(\eta)-\left(\chi_1^2+2\chi_1-1\right)\cos(\eta)\sinh(\eta)+4\chi_1\eta\right\}}{\left[\left(1+\chi_1\right)\cos\left(\frac{\eta}{2}\right)\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right)+\left(1-\chi_1\right)\sin\left(\frac{\eta}{2}\right)\sinh\left(\frac{\eta}{2}\right)\right]^2} \\
&+\frac{(r+s)^2}{4}\frac{\left\{\left(\xi_1^2+2\xi_1\xi_2-\xi_2^2\right)\sin(\eta)\cosh(\eta)+\left(\xi_2^2+2\xi_1\xi_2-\xi_1^2\right)\cos(\eta)\sinh(\eta)+4\xi_1\xi_2\eta\right\}}{4\eta C_T\left[\left(1-\chi_2\right)\sin\left(\frac{\eta}{2}\right)\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right)-\left(1+\chi_2\right)\cos\left(\frac{\eta}{2}\right)\sinh\left(\frac{\eta}{2}\right)\right]^2} \\
&+\mathrm{cotan}(\phi)\big(0.5(r-s)+C_T\mathrm{cotan}(\phi)\big)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\left(\chi_1-1\right)\sin\left(\frac{\eta}{2}\right)\sinh\left(\frac{\eta}{2}\right)-\left(1+\chi_1\right)\cos\left(\frac{\eta}{2}\right)\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right)+\dfrac{2\left(\sin\left(\frac{\eta}{2}\right)\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right)+\chi_1\cos\left(\frac{\eta}{2}\right)\sinh\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)}{\eta}}{\left(1+\chi_1\right)\cos\left(\frac{\eta}{2}\right)\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right)+\left(1-\chi_1\right)\sin\left(\frac{\eta}{2}\right)\sinh\left(\frac{\eta}{2}\right)}
$$

$$
-\frac{(r+s)^2}{2C_T\eta^2}\frac{\left(\xi_1+\xi_2\right)\sin(\eta/2)\cosh(\eta/2)-\left(\xi_1-\xi_2\right)\cos(\eta/2)\sinh(\eta/2)}{\left(1-\chi_2\right)\sin(\eta/2)\cosh(\eta/2)-\left(1+\chi_2\right)\cos(\eta/2)\sinh(\eta/2)} \qquad (15)
$$

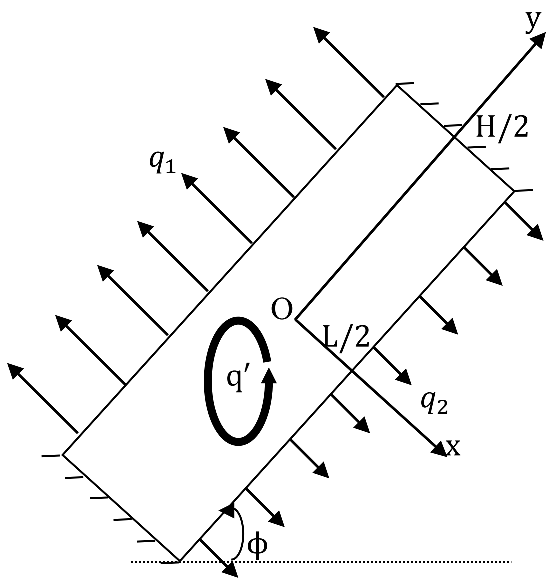



Figure 1 : Configuration étudiée

## 3. Résultats et discussion

Pour le problème physique considéré, les solutions analytiques dépendent des paramètres de contrôle Ra, $\phi$ et r alors que celles numériques dépendent en plus de A et Pr. Donc, dans un premier temps, on détermine les valeurs de A et Pr pour lesquelles les solutions numériques ne dépendent plus de ces paramètres. Les résultats des différents tests effectués (non présentés dans ce travail) ont montré que les deux paramètres A et Pr n'ont pratiquement plus d'effet sur les résultats numériques obtenus lorsqu'ils dépassent les valeurs 5 et 0.1, respectivement. Dans ce qui suit, on prend $A = 5$ et $Pr = 1$.

### 3.1. Influence du nombre de Rayleigh

Les effets du nombre de Rayleigh Ra ($10^3 \leq Ra \leq Ra_l$), l'angle d'inclinaison $\phi$ ($15° \leq \phi \leq 90°$) et du rapport des flux r ($0 \leq r \leq 2$) sur les champs thermiques et dynamiques sont présentés ci-dessous. En même temps et afin de s'assurer de la précision des solutions analytiques développées, ces dernières sont confrontées à celles numériques pour différentes combinaisons des paramètres de contrôle Ra, $\phi$ et r.

Les figures 2a-b présentent les profils de vitesse et de température obtenus analytiquement et numériquement en $Y = 0$ pour $\phi = 45°$, $r = 1$ et différentes valeur de Ra. Pour un nombre de Rayleigh donné, la figure 2a montre que loin des parois courtes de la cavité ($Y = 0$), on a un excellent accord entre les résultats numériques et analytiques. A cause de la chaleur générée au milieu de la cavité, le fluide monte dans la partie centrale de la cavité et descend le long des parois verticales refroidies. Même si le refroidissement est symétrique ($r = s = 1$), les profils de vitesse ne sont pas symétriques par rapport à la médiane $X = 0$. Ceci est dû à l'inclinaison de la cavité qui intensifie l'écoulement à proximité de la paroi 1. Pour $Ra \leq 10^4$, le fluide a une vitesse faible correspondant à un régime de conduction. Pour $Ra = 10^5$, la vitesse maximale $V_{max}$ est atteinte au centre de la cavité, alors que celles faibles sont atteintes près des parois actives. Mais, à cause de l'inclinaison, la vitesse minimale relevée à proximité de la paroi 2 est deux fois moins importante que celle obtenue près de la paroi 1. En passant à $Ra = 10^6$, $V_{max}$ est proche des parois latérales puisque l'écoulement est de type couche limite.

Les profils de température donnés sur la figure 2b montrent qu'en régime de conduction ($Ra < 10^4$), les températures maximales sont atteintes en $X = 0$. Mais, au fur et à mesure que le nombre de Rayleigh augmente, cette position s'approche de la paroi 1. Cela est dû à l'intensité de l'écoulement qui est plus élevée du côté de la paroi 1. Evidemment les températures minimales sont enregistrées au niveau des parois actives et augmentent avec Ra. Pour Ra élevé, $r = 1$ et $\phi = 45°$, on a des gradients horizontaux de température qui sont importants non seulement près des parois actives de la cavité mais aussi autour du centre.

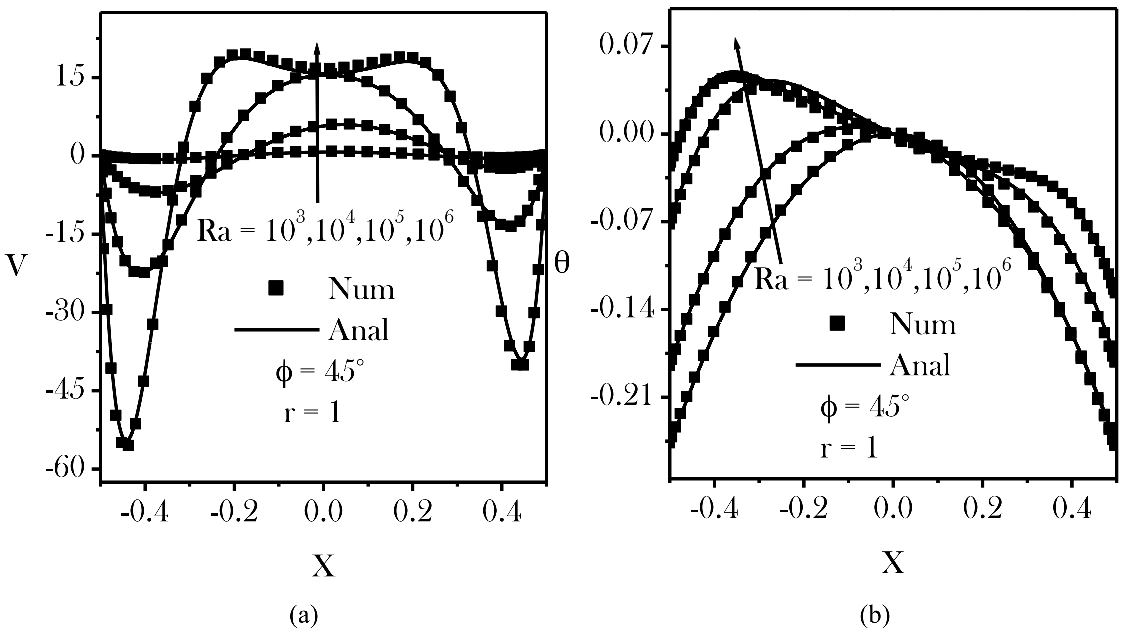


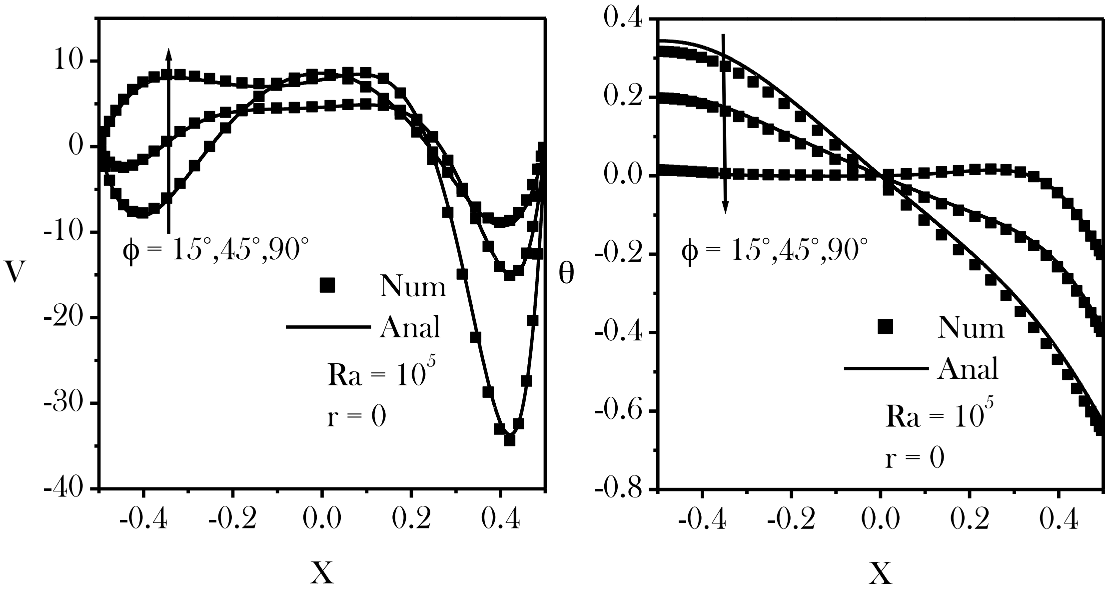

Figure 2 : Profils de $V(X, Y = 0)$ (a) et $\theta(X, Y = 0)$ (b) pour $\phi = 45°$, $r = 1$ et différentes valeur de Ra

Pour différentes valeurs de r et $\phi$, les profils de vitesse et de température du fluide, déterminés analytiquement et numériquement en $Y = 0$, sont présentés sur les figures 3a-c pour $Ra = Ra_l(\phi = 15°)$. A nouveau, ces figures montrent clairement la précision de la solution analytique développée pour toutes les valeurs de l'inclinaison $\phi$ et du rapport de flux de chaleur r considérées.

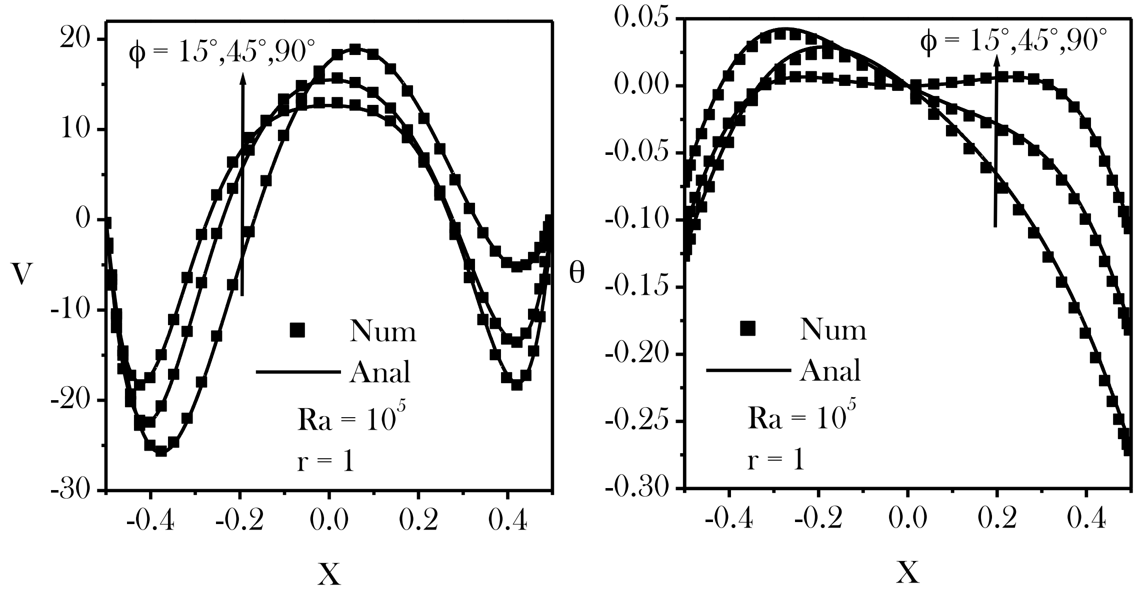
Pour $r = 0$, on constate sur la figure 3a que près de la paroi 1, le fluide monte ou descend le long de cette paroi pour $\phi = 90°$ et $\phi < 90°$, respectivement. Mais, au milieu de la cavité ou à proximité de la paroi 2, on a respectivement un écoulement ascendant ou descendant quelque soit l'angle d'inclinaison considérée. Cela indique que l'inclinaison a un effet considérable sur la structure de l'écoulement qui est monocellulaire si $\phi = 90°$ et bicellulaire si $\phi < 90°$. Les profils de température montrent que du côté de la paroi 1, la température du fluide diminue avec $\phi$ et inversement du côté de la paroi 2. Pour $\phi = 90°$, les transferts thermiques sont dominés par la convection car la température du fluide est pratiquement uniforme sauf au voisinage de la paroi 2 où elle chute subitement. Pour $\phi < 90°$, ces derniers se font principalement par conduction puisque la température du fluide décroit de la paroi 1 jusqu'à la paroi 2.

En passant à $r = 1$ et $\phi$ donnée, on a un écoulement bicellulaire car le fluide est ascendant dans la partie centrale de la cavité et descendant près de ses parois actives. Pour une cavité inclinée, la vitesse du fluide est toujours plus élevée près de la paroi 1, mais, pour $\phi = 90°$, l'écoulement est parfaitement symétrique par rapport à la médiane $X = 0$. Vu que le système est refroidie symétriquement par les deux parois latérales, les profils de température correspondant à $r = 1$, indiquent que la température est maximale en une position qui n'est plus sur la paroi 1. Pour $\phi < 90°$, cette position est proche de la paroi 1 car l'intensité de l'écoulement est plus importante. Mais, comme la structure de l'écoulement est symétrique par rapport à la médiane verticale pour $\phi = 90°$, on a un maximum de température en deux positions symétriques par rapport au centre de la cavité.

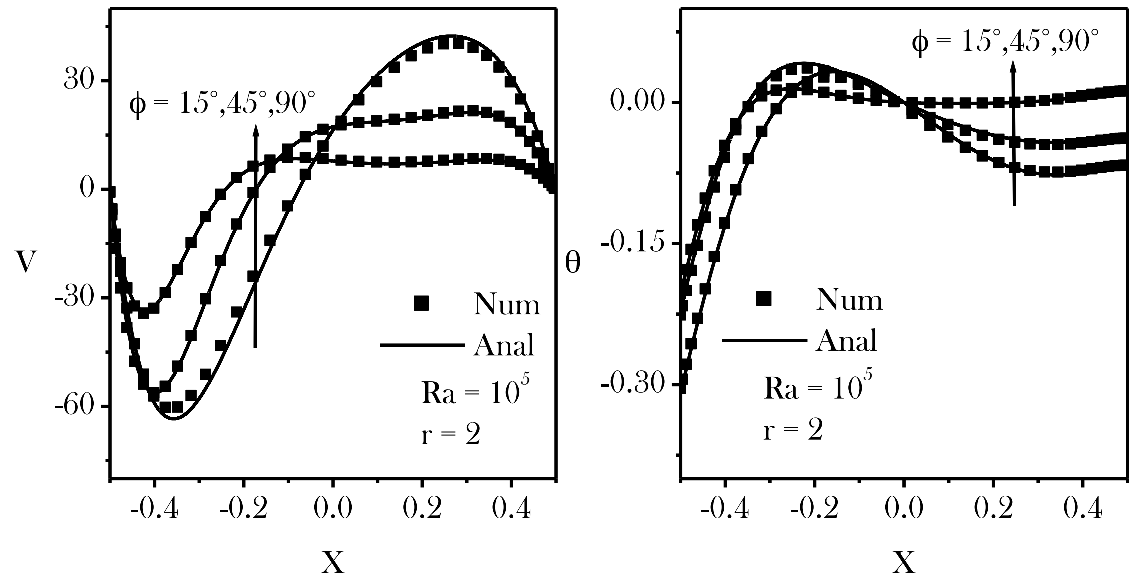
Pour r = 2, le fluide qui se trouve près de la paroi verticale 2 ($\phi = 90°$) est pratiquement immobile car elle est adiabatique. Par contre, celui qui se trouve dans les cavités inclinées il a une vitesse importante même au voisinage de la paroi 2. Ceci est dû à la force de poussée qui projette le fluide chaud qui est proche de la paroi 2 vers la paroi 1. Comme prévu, si r = 2 et $\phi = 90°$, le profil de température obtenu en Y = 0 est déduit de celui relevé pour r = 0 et $\phi = 90°$ par simple symétrique par rapport à la médiane X = 0. Par contre, pour $\phi < 90°$ et r = 2, on a un champ thermique qui est entièrement différent de celui obtenu lorsque c'est la paroi 1 qui est adiabatique car l'écoulement est de type couche limite même si la cavité est fortement inclinée.




(a)




(b)




(c)

Figure 3 : Profils de $V(X, Y = 0)$ et $\theta(X, Y = 0)$ pour $Ra = 10^5$et différentes valeurs de $\phi = (15°, 45°, 90°)$ avec $r = 0$ (a), $r = 1$ (b) et $r = 2$ (c).

## 4. Conclusion

Dans ce travail, une solution analytique basée sur l'approximation des écoulements parallèles a été développée pour décrire la convection naturelle laminaire au sein d'une cavité inclinée contenant un fluide qui génère uniformément de la chaleur en volume. Le système est refroidi en imposant des flux de chaleur uniformes égaux ($r = 1$) ou différents ($r \neq 1$) sur ses parois latérales. La validité de la solution analytique détaillée a été testée à l'aide de données numériques issues d'une résolution complète des équations de conservation. Pour les deux types de refroidissement considérés (symétrique ($r = 1$) ou asymétrique ($r \neq 1$)) et différents angles d'inclinaison, un très bon accord a été obtenu entre les profils de vitesse et de température au milieu de la cavité.

Les résultats obtenus ont montré que l'effet des paramètres $r$ et $\phi$ est significatif car ils conduisent à des structures de l'écoulement différentes. Pour $\phi = 90°$ et $r = 1$, on a observé que la structure de l'écoulement est symétrique par rapport à la médiane verticale $X = 0$. Par contre, pour $\phi = 90°$ et $r \neq 1$, on obtient une structure de l'écoulement symétrique à celle observée pour $\phi = 90°$ et $1 - r \neq 1$. Pour des cavités inclinées, aucune symétrie n'est observée même si le refroidissement est identique sur les deux parois latérales de la cavité.

**Nomenclature**

A rapport de forme de la cavité
$C_T$ coefficient de stratification thermique
g pesanteur, *$m/s^2$*
H hauteur de la cavité, *m*
J opérateur
k conductivité thermique, *W/mK*
L largeur de la cavité, *m*
P pression adimensionnelle
Pr nombre de Prandtl
q flux de chaleur, *$W/m^2$*
$q'$ chaleur volumique, $W/m^3$
r rapport des flux
Ra nombre de Rayleigh
T température, *K*
t temps, *s*
$u, v$ composantes de vitesse, *m/s*
U,V composantes de vitesse adimensionnelles
$x, y$ coordonnées cartésiennes, *m*
$X, Y$ coordonnées cartésiennes adimensionnelles

Symboles grecs
$\alpha$ diffusivité thermique, *$m^2/s$*
$\beta$ coefficient d'expansion thermique, *$K^{-1}$*
$\nu$ viscosité cinématique, *$m^2/s$*
$\rho$ masse volumique, *$Kg/m^3$*
$\tau$ temps adimensionnel
$\psi$ fonction de courant
$\phi$ angle d'inclinaison, °

Indices
1,2 paroi 1,2
c conduction
h médiane
l limite
m moyenne
max maximale

**Références**

[1] O.H. May, A numerical study on natural convection in inclined square enclosure containing internal heat sources, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 34, Pages 919-928, 1991.

[2] A.G. Churbanov, P.N. Vabischevich, V.V. Chudanov et V.F. Strizhov, A numerical study on natural convection of a heat-generation fluid in rectangular enclosures, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 37, Pages 2969-2984, 1994.

[3] I. Di Piazza et M. Ciofalo, Low-Prandtl number natural convection in volumetrically heated rectangular enclosures I. Slender cavity, $A = 4$, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 43, Pages 3027-3051, 2000.

[4] S. Arcidiacono et M. Ciofalo, Low-Prandtl number natural convection in volumetrically heated rectangular enclosures III. Shallow cavity, $A = 0.25$, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 44, Pages 3053-3065, 2001.

[5] S. Arcidiacono, I. Di Piazza et M. Ciofalo, Low-Prandtl number natural convection in volumetrically heated rectangular enclosures II. Square cavity, $A = 1$, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 44, Pages 537-550, 2001.

[6] P. Deshmukh, K.M. Sushanta et U.N. Gaitonde, Investigation of natural circulation in cavities with uniform heat generation for different Prandtl number fluids, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 54, Pages 1465-1474, 2011.

[7] P.G. Daniels et O.K. Jones, Convection in a shallow rectangular cavity due to internal heat generation, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 41, Pages 3979-3987, 1998.

[8] C. An, C.B. Vieira et J. Su, Integral transform solution of natural convection in a square cavity with volumetric heat generation, *Brazilian Journal of Chemical Engineering*, Volume 30, Pages 883-896, 2013.

[9] S. Kimura et A. Bejan, The boundary layer natural convection regime in a rectangular cavity with uniform heat flux from the side, *ASME Journal of Heat Transfer*, Volume 106, Pages 98-103, 1984.

[10] P. Vasseur, M. Hasnaoui et E. Bilgen, Analytical and numerical study of natural convection heat transfer in an inclined composite enclosure, *Applied Science Research*, Volume 52, Pages 187-207, 1994.

[11] M. Prud'homme, H. Bougherara et A. Bahloul, Convection in a vertical cavity submitted to crossed uniform heat fluxes, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 46, Pages 3831-3840, 2003.

[12] F. Alavyoon, On natural convection in vertical porous enclosures due to prescribed fluxes of heat and mass at the vertical boundaries, *International Journal of Heat and Mass Transfer,* Volume 36, Pages 2479-2498, 1993.

[13] M. Mamou, P. Vasseur et E. Bilgen, Analytical and numerical study of double diffusive convection in a vertical enclosure, *Heat and Mass Transfer*, Volume 32, Pages 115-125, 1996.

[14] L. Kalla, M. Mamou, P. Vasseur et L. Robillard, Multiple solutions for double diffusive convection in a shallow porous cavity with vertical fluxes of heat and mass, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 44, Pages 4493-4504, 2001.