

ANALYSE DE LA CONVECTION NATURELLE TRIDIMENSIONNELLE

D.Akrou¹, R.Bennacer², D.Kalache¹

1. Laboratoire de Mécanique des Fluides, Institut de Physique, USTHB
BP N°32 El-Alia, Bab-Ezzouar, 16111 Alger, Algérie
Fax: 0021321247344, e-mail: dalila_akrou@yahoo.com

2. Université de Cergy-Pontoise, Rue d'Eragny, 95031, Neuville sur Oise, France

RESUME :

Le but de ce travail est de modéliser les écoulements ainsi que les transferts qui se produisent lors de l'élaboration de matériaux. Pour être plus proche de la réalité expérimentale, nous avons envisagé le passage en géométrie 3-D, une analyse numérique plus approfondie des phénomènes de convection est adoptée. Ce mode de production vise à produire des cristaux purs non affectés par les parois.

L'évolution des écoulements en fonction du nombre de Rayleigh est observée ainsi que les taux de transferts pour les différentes grilles utilisées. Les équations gouvernantes sont résolues par la méthode des volumes finis.

Mots clés : analyse tridimensionnelle, différentiellement chauffée, volume finis, transfert de chaleur, convection naturelle.

Nomenclature		U, V, W	vitesse cartésienne adimensionnelle, uH/v, vH/v, wH/v
A _x	rapport de forme dans la direction x, L _x /H	X, Y, Z	coordonnées cartésiennes
A _y	rapport de forme dans la direction y, L _y /H	α	diffusivité thermique
H	hauteur de la cavité	φ	champs de U, V, W ou T
k	conductivité thermique	v	viscosité cinématique
Nu	nombre de Nusselt local, hH/k	ρ	la densité
P	pression adimensionnelle		
Pr	nombre de Prandtl, ν/α	indices :	
Ra	nombre de Rayleigh, gβ(t _h -t _c)H ³ /να	c	froid
T	température adimensionnelle (t-t _c)/(t _h -t _c)	h	chaud

1. INTRODUCTION :

La configuration classique d'une cavité différentiellement chauffée est représentative d'un grand nombre de configurations d'intérêt pratique (thermique de l'habitat, refroidissement des composants électroniques...). Toutefois, de nombreuses études se sont essentiellement limitées au cas d'une géométrie bidimensionnelle De Vahl Davis (1983)[1], faute d'avoir une puissance de calcul suffisante pour une bonne représentation spatiale.

Ce n'est que récemment, sous les progrès conjugués des algorithmes de résolution et de l'amélioration des puissances de calcul, que des études de simulation tridimensionnelles à valeur de Ra intermédiaire ont vu le jour, permettant des comparaisons directes avec des expériences de laboratoire.

Mallinson et De Vahl Davis (1977) [2] furent les premiers à avoir essayé de caractériser la dynamique d'un écoulement tridimensionnel pour des valeurs de Ra comprises entre 10³ et 10⁵.

Par la suite, quelques études ont été publiées Fusegui et al (1991) [3], Haldenwang et Labrosse, (1986) [4], I. Sezan et A.A. Mohamed (2000) [5], Man Yeong Ha et Mi Jung Jung (2000) [6], donnant une description dynamique de l'écoulement en régime permanent ainsi que les taux de transfert de chaleur.

A partir de là, il est apparu nécessaire de comprendre l'influence de la troisième direction. D'où la motivation de notre travail où on s'est intéressé à l'étude tridimensionnelle de l'écoulement de l'air dans une cavité parallélépipédique (cubique) pour des nombres de Rayleigh compris entre 10³ et 10⁶.

2. POSITION DU PROBLEME :

La configuration étudiée est une cavité carrée ou cubique différentiellement chauffée pour un écoulement de l'air. Les rapports d'aspect égalent à 1 :

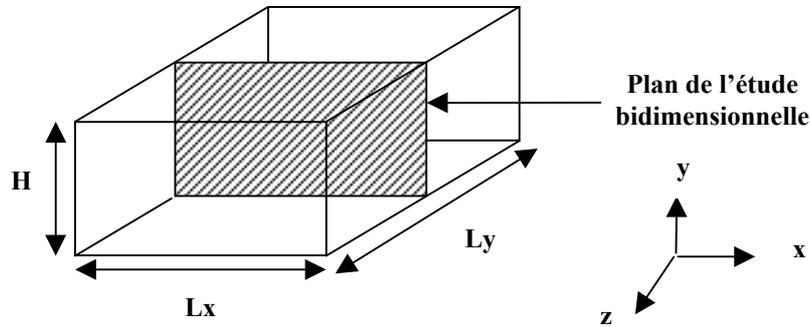


Figure 1 : configuration géométrique

Les faces différentiellement chauffées sont normales à la direction x.

2.1 Modèle Mathématique :

La formulation mathématique du problème a été faite en adoptant les hypothèses suivantes :

- L'écoulement est tridimensionnel, laminaire et permanent.
- L'hypothèse de Boussinesq est admise.
- Les autres propriétés physiques du fluide sont considérées constantes et sont calculées à la température moyenne du fluide.

Le mouvement du fluide à l'intérieur de la cavité peut être décrit par les équations adimensionnelles de conservation suivantes :

Continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0$$

Les équations de quantité de mouvement :

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} + W \frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \nabla^2 U$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} + W \frac{\partial V}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \nabla^2 V$$

$$U \frac{\partial W}{\partial X} + V \frac{\partial W}{\partial Y} + W \frac{\partial W}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \nabla^2 W + \frac{RaT}{Pr}$$

Energie :

$$U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial Y} + W \frac{\partial T}{\partial Z} = \frac{-1}{Pr} \nabla^2 T$$

Où les variables adimensionnelles sont définies par :

$X=x/H$, $Y=y/H$, $Z=z/H$, $P=p/\rho (v/H)^2$, $U=u/(v/H)$, $V=w/(v/H)$, $W=w/(v/H)$ et $T=(t-t_c)/(t_h-t_c)$.

Dans ces équations, on définit respectivement le nombre de Prandtl $Pr = \nu/\alpha$ et le nombre de Rayleigh $Ra = g\beta(t_h-t_c)H^3/\nu\alpha$

Les conditions aux limites ont suivantes :

$X=0$, $U=V=W=0$, $T=1$

$X=1$, $U=V=W=0$, $T=0$

$Y=0$ et $Y=1$, $U=V=W=0$, $\partial T/\partial Y=0$

$Z=0$ et $Z=1$, $U=V=W=0$, $\partial T/\partial Z=0$

On définit le nombre de Nusselt moyen vertical en Y donné par :

$$Nu(y) = \int_0^1 \frac{\partial T}{\partial X} \Big|_{x=0} dZ = \int_0^1 Nu(y, z) dZ$$

Pour la paroi X=0, le flux thermique total est donné par : $Nu_{3D} = \int_0^1 Nu(y) dy$ qui est le nombre de Nusselt moyen pour cette paroi.

On définit aussi un nombre de Nusselt vertical médian Nu_m par : $Nu_m = Nu(y=0,5)$ celui-ci sera comparé au Nusselt du cas bidimensionnel.

2.2 Méthode de Résolution :

Ce système d'équations couplées est résolu par une méthode de volumes finis utilisant une formulation des équations en variables primitives (pression-vitesse).

Afin de minimiser les erreurs dues à la diffusion numérique, un schéma de type QUICK est utilisé dans l'approximation des termes advectifs.

Le système de grille utilisé pour l'ensemble des calculs effectués, est illustré par la figure 1, d'une taille 42 x 42 x 42 dans les trois directions pour un nombre de Rayleigh inférieur à 10^5 .

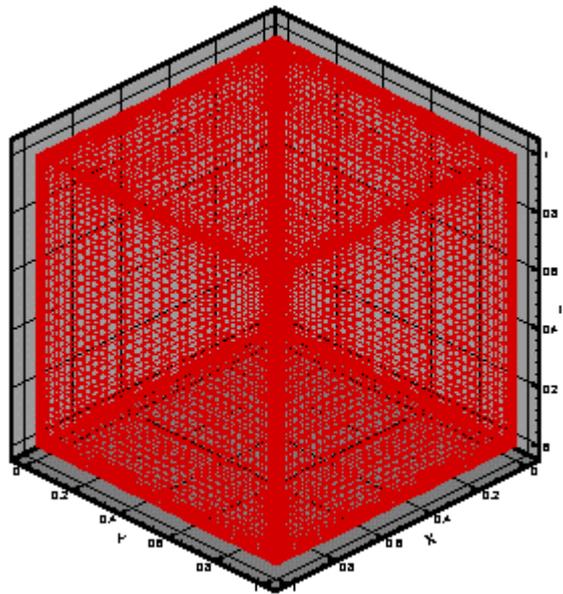


Fig.1. Système de Grille utilisé

Une solution convergée est atteinte lorsque le critère de convergence est vérifié.

$$\sum \left| \phi_{ijk}^m - \phi_{ijk}^{m-1} \right| \leq 10^{-3}$$

3. RESULTATS ET DISCUSSION :

La dynamique du fluide représentée dans la figure 2, pour chaque composante de vitesse (u, v et w), montre que la vitesse horizontale est prépondérante au voisinage des parois horizontales ($z = 0$ et 1), ce qui entraîne l'écoulement principal.

Par contre, la vitesse w prend des valeurs importantes près des parois isothermes (figure 2-c) due au développement de la couche limite localisée près des parois $x = 0$ et $x = 1$. En conclusion, la région intérieure de la cavité est constituée principalement par une seule cellule créée par la combinaison des champs des vitesse de U et V.

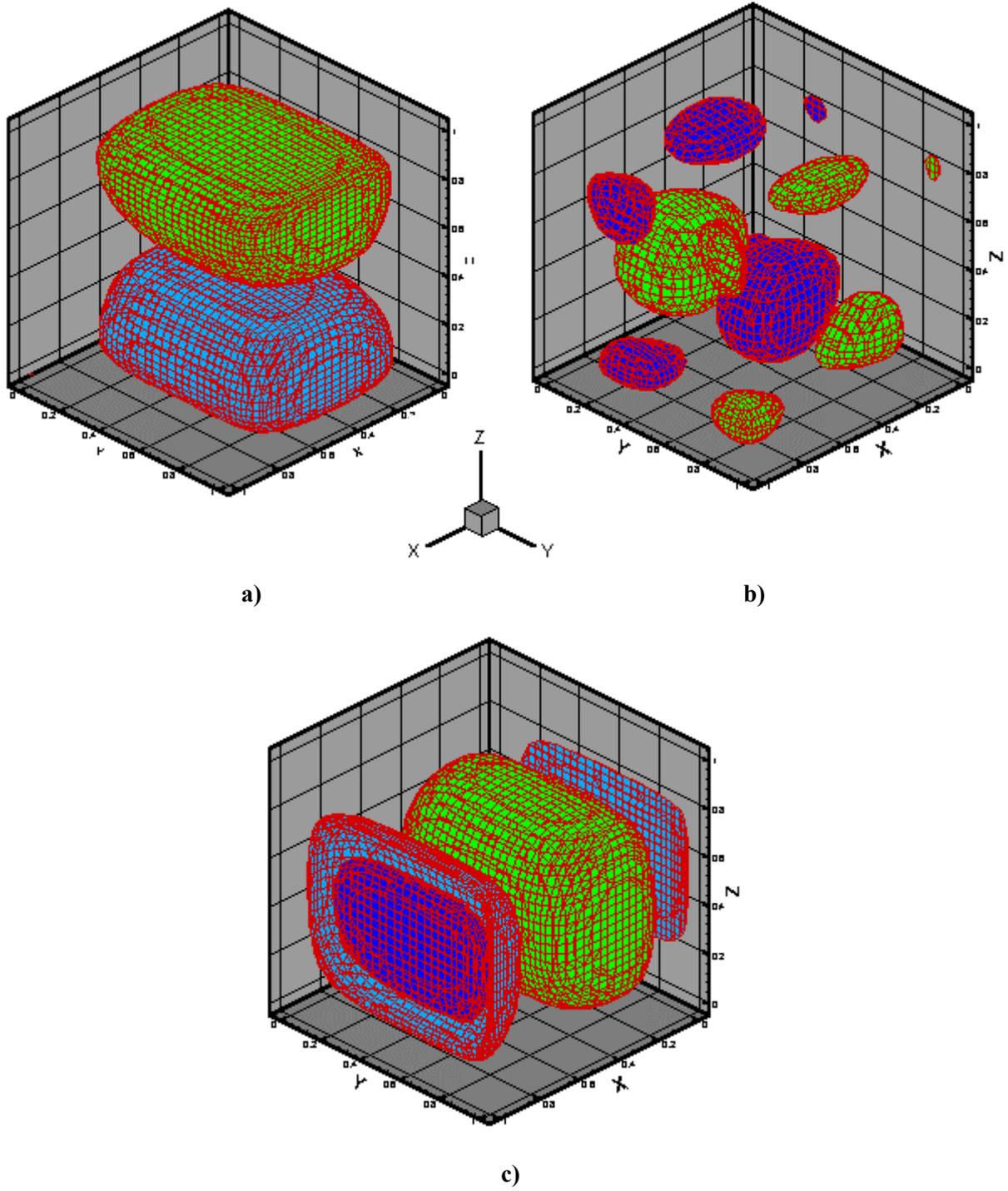


Fig-2 : Les contours des isovitesse pour $Ra=10^3$, a)- vitesse horizontale U, b)- vitesse V, c) vitesse verticale W

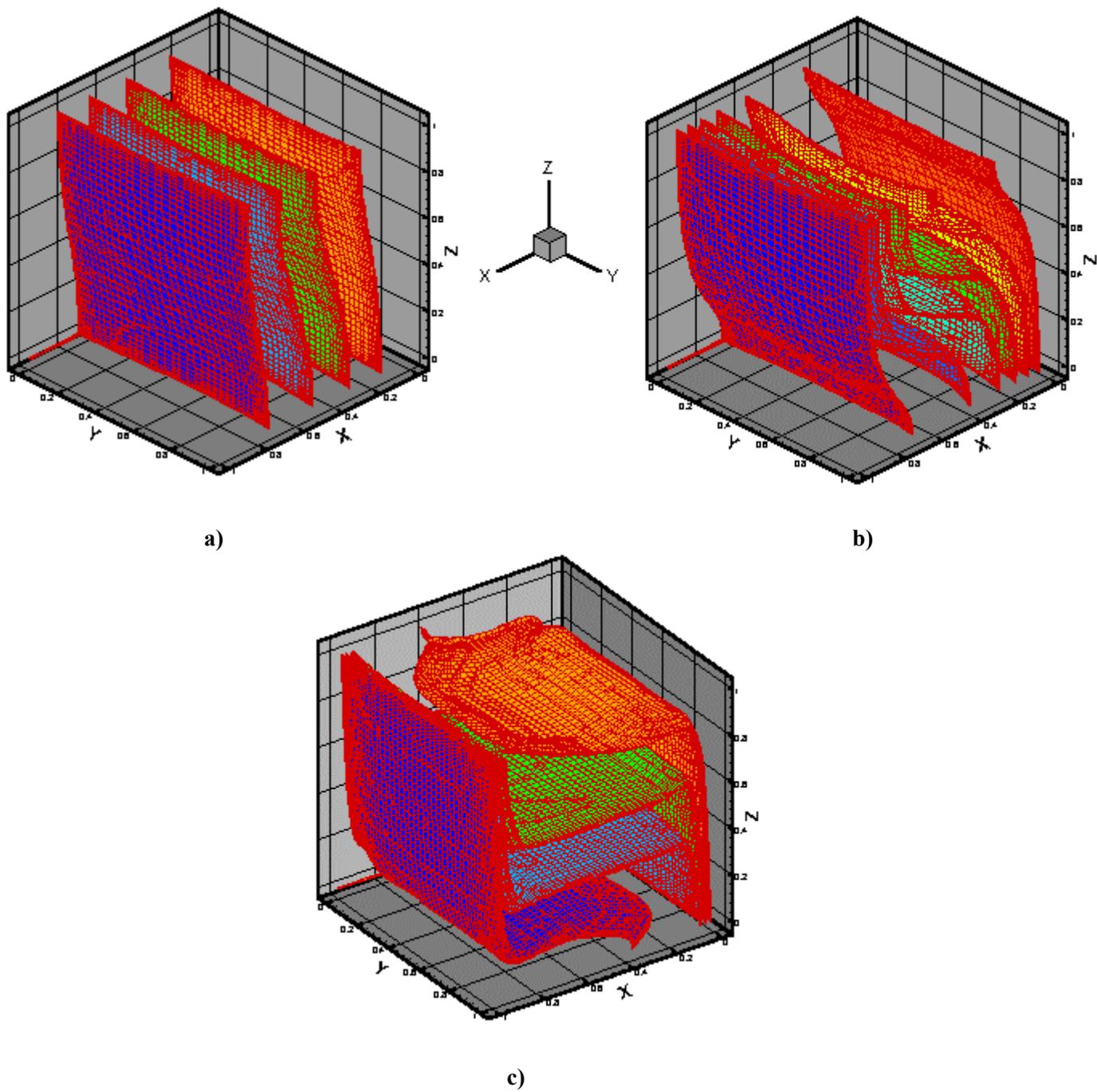


Fig-3 : Les contours des isothermes pour, a)- $Ra=10^3$, b) $Ra=10^4$, c) $Ra=10^6$

La figure 2-b dénote que l'effet de la vitesse V est très faible, voire négligeable devant les variations de U et V . Pour un nombre de Rayleigh égal à 10^3 , les isothermes de la figure 3-a), montre que l'écoulement est symétrique par rapport au plan $y = 0.5$, la variation tridimensionnelle dans la direction y est faible en amplitude.

Pour $Ra = 10^6$, les isothermes présentées sur la figure 3-c) sont plus déformées et l'écoulement au centre de la cavité est stagnant, avec une stratification en température, ceci est dû à l'existence d'une fine couche limite près des parois $x = 0$ et 1 . La variation tridimensionnelle est notable près des parois $z = 0$ et 1 .

Les variations de vitesse U et W sont maintenant confinées près des parois comme le montre la figure 4 –a) et c). La composante V se développe aux coins de la cavité (figure 4-b), mais ses valeurs restent faibles devant les variations importantes des champs U et V traînant ainsi l'écoulement.

Nous pouvons donc conclure qu'il existe une faible dépendance en Y du champ dynamique V , sa distribution est très peu affectée par la tridimensionnalité de l'écoulement.

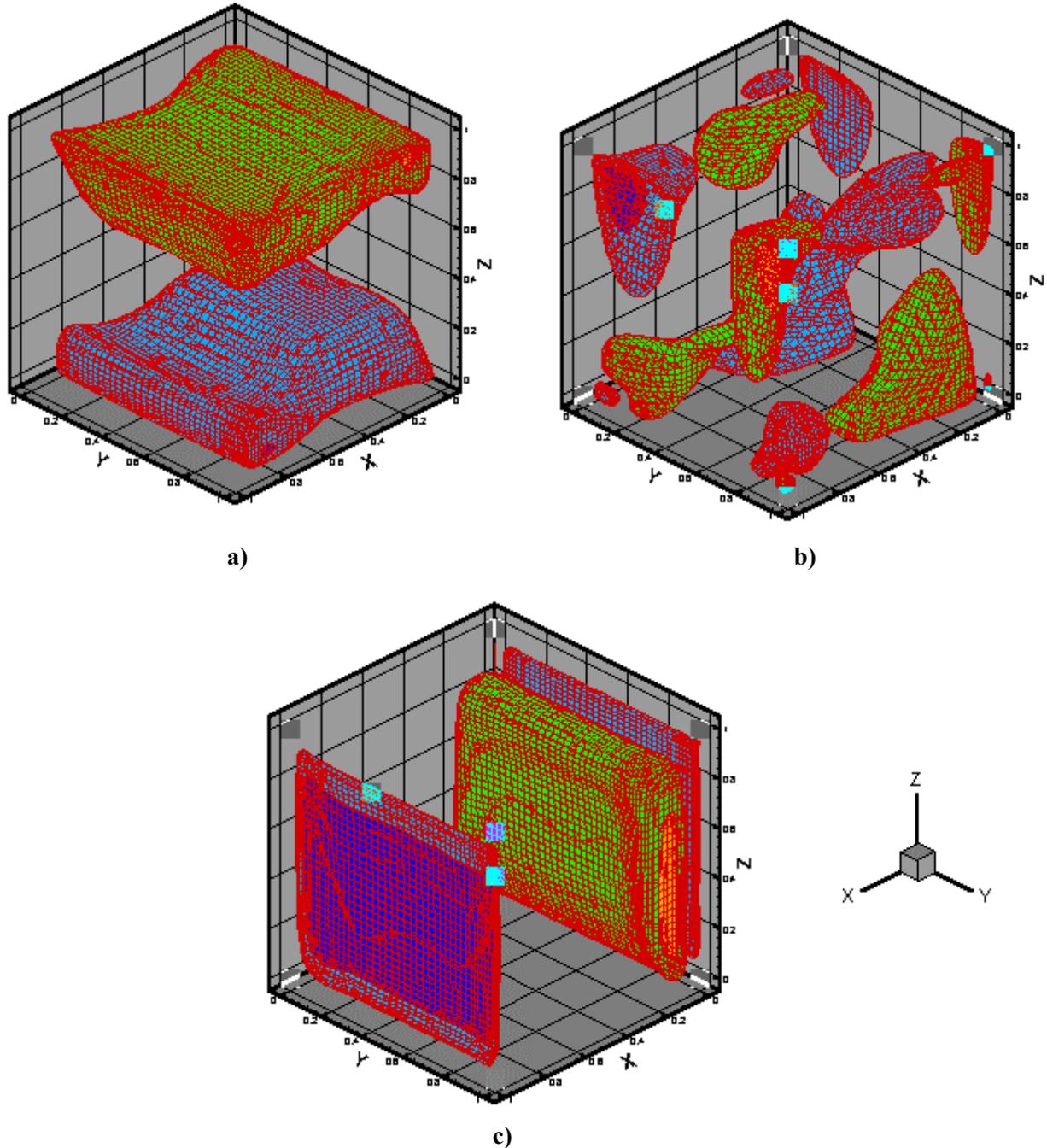


Fig-4- : Les contours des isovitesse pour $Ra=10^6$, a)-vitesse horizontale U , b)-vitesse V , c)vitesse verticale W

4. TRANSFERT THERMIQUE :

Nous avons représenté sur la figure 5, la variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de y (la direction perpendiculaire aux parois adiabatiques verticales). Le nombre de Nusselt croît d'une façon symétrique au plan $y = 0,5$. On remarque que cette variation décroît dès qu'on s'approche des parois terminales adiabatiques qui diminuent quand le nombre de Rayleigh augmente, ce qui traduit une diminution des effets des parois adiabatiques sur le transfert de chaleur et ceci est dû aux forts gradients de température près des parois isothermes.

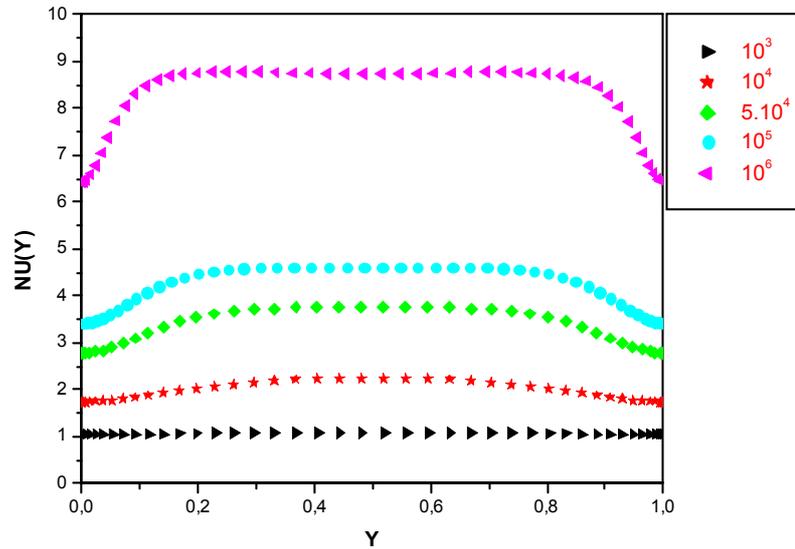


Fig . 5 : La variation de Nusselt en fonction de Ra

Afin d'illustrer l'influence de Ra sur le transfert de chaleur, nous avons représenté sur la figure 6 la distribution de Nusselt local au niveau de la paroi chauffée ($x = 0$), les figures montrent que Nusselt change rapidement dans la direction verticale. La variation horizontale (suivant y) est visible près des surfaces adjacentes aux plans $y = 0$ et $y = 1$. Un comportement similaire est obtenu pour la paroi froide.

Si nous comparons ces valeurs de Nusselt retrouvées en 3D avec celles d'une cavité carrée 2D (tableau -1-), nous constatons que Nu_{3D} est, dans tous les cas, inférieur à Nu_{2D} alors que Nu_m ($y = 0,5$) lui est toujours supérieur. On remarque que Nu_{2D} est une meilleure estimation pour Nu_m qu'il ne l'est pour Nu_{3D} .

Ra	Maillages 2D	Nu _{2D}	Maillages 3D	Nu _{3D}	Nu _m
10 ³	39 x 39	1,117	42 x 42 x 42	1,071	1,088
10 ⁴	61 x 61	2,238	42 x 42 x 42	2,057	2,252
10 ⁵	81 x 81	4,509	52 x 52 x 52	4,330	4,617
10 ⁶	73 x 73	8,825	52 x 52 x 52	8,468	

En utilisant nos résultats trouvés dans une cavité tridimensionnelle, nous pouvons écrire une corrélation en Nu_{3D} , donnée par :

$$Nu_{3D} = 0.1291.Ra^{0.304}$$

Cette corrélation est valable dans le domaine étudié : $10^3 \leq Ra \leq 10^6$.

Cette expression est en bonne concordance avec celle proposée par T. Fusegi et all (1991) [3], qui trouve numériquement : $Nu_{3D} = 0.1307.Ra^{0.304}$.

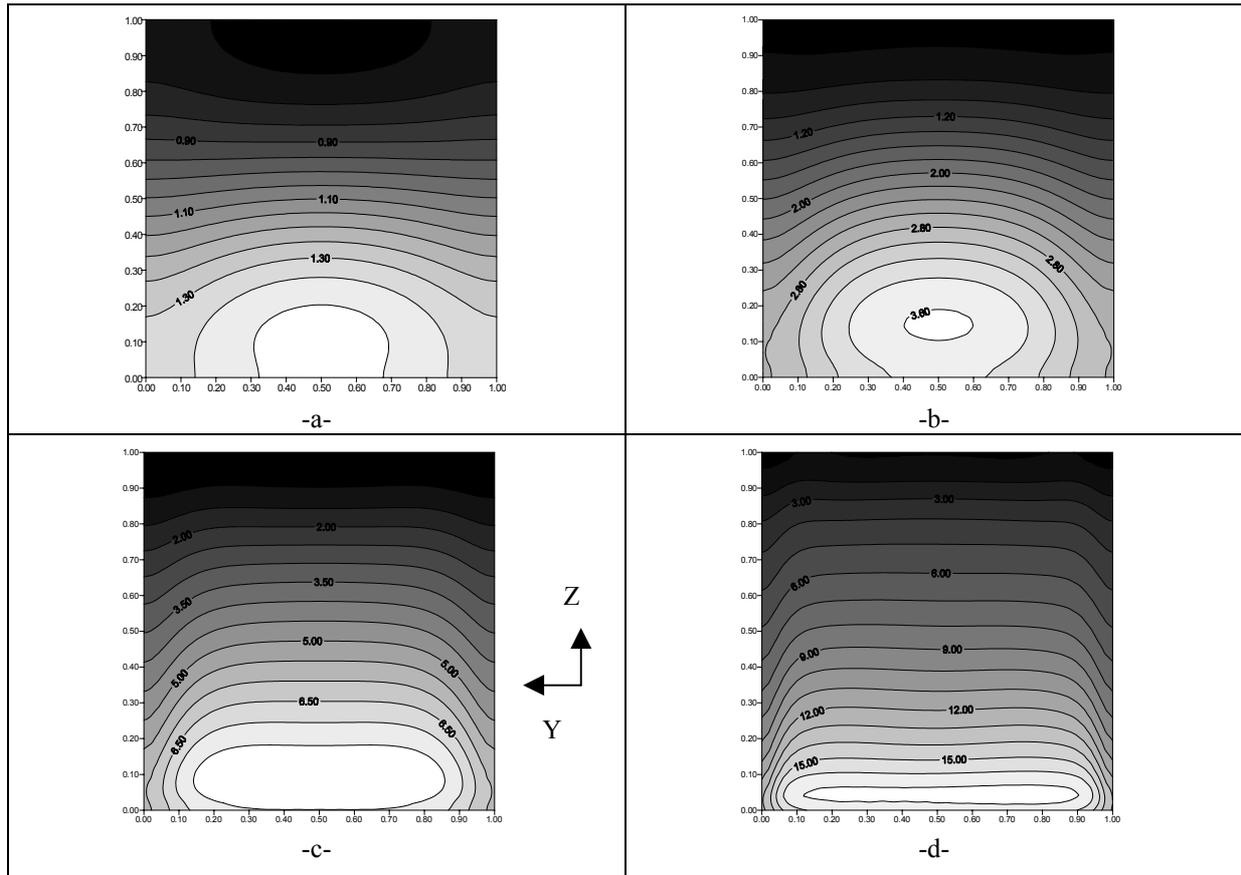


Fig-6 : La distribution du nombre de Nusselt à la paroi chaude
a)- $Ra=10^3$, b)- $Ra=10^4$ c)- $Ra=10^5$, d)- $Ra=10^5$

CONCLUSION :

L'ensemble de nos résultats nous a permis de proposer des solutions 3D caractéristiques pour cinq valeurs du nombre de Rayleigh , 10^3 , 10^4 , 10^5 , 10^6 , Nous avons remarqué que :

- L'effet de la composante de vitesse V , associé à la direction Y est très faible devant les vitesses U et W .
- La distribution des isothermes est très peu affectée par la tridimensionnalité de l'écoulement.
- Le transfert de chaleur N_{2D} est une meilleure estimation pour Nu ($y=0,5$) qu'il ne l'est pour N_{3D} . Ce point est confirmé par une étude comparative des nombres de Nu 2D et 3D par rapport à celui associé au plan médian ($y=0,5$) de la cavité cubique.

REFERENCES :

- [1]G.De.Vahl Davis, I.P.Jones.Natural convection in a square cavity : a comparison exercise. Int.J.for Num.Meth.in Fluid, vol.3,pp.227-248,(1983)
- [2]G.D.Mallinson and G.De.Vahl Davis. Three dimensional convection in a box : a numerical study.J.Fluid Mechanics, vol 83,pp.1-31,(1977).
- [3] T.Fusegi.J.M.Hyun. A numerical study of three dimensional natural convection in a differentially heated cubical enclosure, I.J.H.M.T , vol.34, 1543-1557, (1991)
- [4]P.Haldenwang et G.Labrosse.2D et 3D spectral chebyshev solutions for free convection at high Rayleigh number. 6th International Symposium of finite element Methods in Flow Problems, Antibes, France, (1986).
- [5]I.Sezai, A.A.Mohamad, Natural convection from a discrete heat source on the bottom of a horizontal enclosure, I.J.H.M.T , vol.43,2257-2266, (2000).
- [6]Man.Yeong.Ha, Mi.Jung.Jung , A numerical study on three dimensional conjugate heat transfer of natural convection and induction a differentially heated cubical enclosure with a heat generating cubic conducting body, I.J.H.M.T vol.43, pp.4229-4248, (2000).