

ETUDE DE LA CONVECTION NATURELLE DANS UNE ENCEINTE DONT L'UNE DES PAROIS VERTICALES EST CONSTITUEE D'UN MATERIAUX POREUX SATUREE D'EAU

R. HAJ MOHAMAD, X. CHESNEAU, L. PIETRI, B. ZEGHMATI

Centre d'Etudes Fondamentales - Groupe de Mécanique Acoustique et Instrumentation
(C.E.F-G.M.A.I) UPRES EA 2986, Université de Perpignan
52, Avenue de Villeneuve 66860 PERPIGNAN France
00 (33)468661771; zeghmati@univ-perp.fr

Résumé *La convection naturelle dans un système constitué d'une enceinte dont l'une des parois est assimilée à un matériau poreux saturé d'eau est analysée numériquement. Les transferts dans l'enceinte et la paroi poreuse sont décrits respectivement par les équations classiques de la convection naturelle et le modèle de Darcy. Ces équations sont résolues en utilisant la formulation fonction de courant-vorticité et une méthode implicite aux différences finies. Les résultats montrent que les transferts dans l'enceinte et la paroi poreuse sont notamment d'autant plus intenses que le rapport de forme et le nombre de Darcy-Grashof modifié sont élevés.*

Mots clés : convection naturelle, milieu poreux, fonction de courant, isothermes, isoconcentrations

1. INTRODUCTION

Les travaux concernant la convection naturelle dans les enceintes parallélépipédiques considèrent généralement que les parois verticales sont soumises à des densités de flux de chaleur ou maintenues à des températures différentes tandis que les parois horizontales sont adiabatiques [1-3]. Dans un milieu poreux saturé, les études montrent que l'intensité des transferts qui se déroulent par convection naturelle et la morphologie du contour des lignes de courant, des isothermes et des isoconcentrations dépendent généralement de la nature des conditions aux limites imposées au milieu, du rapport entre les forces de flottabilité d'origine massique et thermique et du nombre de Lewis [4-6]. Dans les enceintes et dans les milieux poreux où les transferts par convection naturelle sont décrits par les modèles de Darcy ou de Darcy-Brinkman, les équations qui régissent la convection naturelle sont principalement résolues en utilisant la formulation fonction de courant-vorticité et les méthodes implicites aux différences finies. Les transferts sont principalement fonction du nombre de Rayleigh, du rapport de forme de la cavité et du nombre de Darcy.

On se propose d'analyser numériquement les transferts de chaleur et de masse qui s'effectuent par convection naturelle laminaire transitoire dans une enceinte parallélépipédique et l'une de ses parois assimilée à un matériau poreux saturé d'eau. Les équations qui régissent les transferts dans l'enceinte et la paroi et les conditions aux limites qui leur sont associées sont résolues en utilisant la formulation vorticité-fonction (Ω - Ψ) de courant et une méthode implicite aux différences finies. Les résultats sont présentés sous forme d'isothermes, de fonctions de courant, d'isoconcentrations pour une gamme de paramètres caractéristiques du modèle. Des corrélations faisant intervenir le rapport de forme de l'enceinte et le nombre de Darcy-Grashof modifié sont établies pour traduire l'influence de ces paramètres sur les transferts de chaleur et de masse qui se déroulent dans l'enceinte.

2. FORMULATION DU PROBLEME

Considérons une enceinte parallélépipédique dont la largeur est supposée suffisamment grande pour que les transferts qui s'y déroulent soient bidimensionnels. L'une des parois, constituée d'un matériau poreux saturé, est soumise à un flux de chaleur uniforme de densité constante. Les parois supérieure et inférieure de cette enceinte sont supposées adiabatiques, tandis que les parois latérales échangent de la chaleur par conduction-convection avec l'ambiance (figure 1). Associons à cette enceinte un repère cartésien tel que l'origine O soit placée à l'extrémité inférieure de la paroi verticale non assimilée à un milieu poreux. L'ordonnée y est normale à cette paroi et l'abscisse x est comptée positivement dans la direction perpendiculaire à la paroi inférieure.

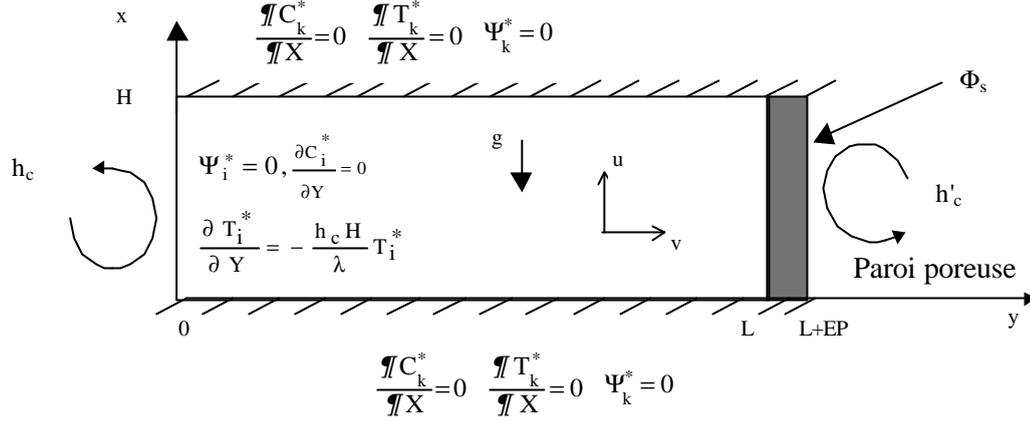


Figure 1 : Schéma du modèle physique

Posons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- les effets Dufour et Soret sont négligeables,
- la dissipation d'énergie visqueuse est négligeable,
- l'air est assimilé à un gaz parfait,
- il n'y a pas de condensation sur les parois,
- la diffusion enthalpique est négligée,
- les échanges radiatifs entre les parois sont négligeables.

Dans l'enceinte et la paroi poreuse, les transferts sont régis respectivement par les équations classiques de la convection naturelle et celles du modèle de Darcy. L'adimensionnalisation de ces équations repose sur les variables adimensionnelles suivantes :

$$\begin{aligned}
 u_k^* &= \frac{u_k}{n_k} H & v_k^* &= \frac{v_k}{n_k} H & X &= \frac{x}{H} & Y &= \frac{y}{H} & p_k^* &= \frac{p_k H^2}{r_k n_k^2} & t &= \frac{t_k n_k}{H^2} & T_k^* &= \frac{g b_T H^3 (T_k - T_a)}{n_k^2} \\
 C_k^* &= \frac{g b_c H^3 (C_k - C_a)}{n_k^2} & Gr^* &= \frac{g \beta_T H^4 \Phi_k}{\lambda_k \nu_k^2} & & & & & & & & & & & (1)
 \end{aligned}$$

Compte-tenu des hypothèses simplificatrices et des variables adimensionnelles formulées ci-dessus, les équations adimensionnelles s'écrivent :

Equation de continuité

$$\frac{\nabla^2 \Psi_k^*}{X^2} + \frac{\nabla^2 \Psi_k^*}{Y^2} + A = 0 \quad (2)$$

avec
$$A = \begin{cases} \tilde{U}_i^* & : \text{enceinte} \\ K_p H^{-2} \left(\frac{\partial T_p^*}{\partial Y} + \frac{\partial T_p^*}{\partial Y} \right)^{-1} & : \text{paroi poreuse} \end{cases}$$

Equation de mouvement

$$\frac{\partial \Omega_k^*}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi_k^*}{\partial Y} \frac{\partial \Omega_k^*}{\partial X} - \frac{\partial \Psi_k^*}{\partial X} \frac{\partial \Omega_k^*}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \Omega_k^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega_k^*}{\partial Y^2} - \frac{\partial T_k^*}{\partial Y} - \frac{\partial C_k^*}{\partial Y} \quad (3)$$

Equation de la chaleur

$$\frac{\partial T_k^*}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi_k^*}{\partial Y} \frac{\partial T_k^*}{\partial X} - \frac{\partial \Psi_k^*}{\partial X} \frac{\partial T_k^*}{\partial Y} = \frac{1}{Pr_k} \left[\frac{\partial^2 T_k^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T_k^*}{\partial Y^2} \right] \quad (4)$$

Equation de diffusion

$$\frac{\partial C_k^*}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi_k^*}{\partial Y} \frac{\partial C_k^*}{\partial X} - \frac{\partial \Psi_k^*}{\partial X} \frac{\partial C_k^*}{\partial Y} = \frac{1}{Sc_k} \left[\frac{\partial^2 C_k^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C_k^*}{\partial Y^2} \right] \quad (5)$$

Aux conditions aux limites reportées sur la figure 1, nous ajoutons celles sur les faces externe et interne de la paroi poreuse.

- 0 ≤ X ≤ 1 ; Y = L/H

$$v_i^* = -\frac{D_i v_i}{g \beta_c H^3} \frac{\partial C_i^*}{\partial Y} \quad m_p \frac{\int u_p^*}{\int X} = m_i \frac{\int u_i^*}{\int X} \quad C_i^* = \frac{g b_c H^3 (C_{vs} - C_a)}{n_i^2}$$

$$-\frac{\partial T_i^*}{\partial Y} - \frac{L_{vi} D_i \rho_i \beta_T}{\lambda_i \beta_c} \frac{\partial C_i^*}{\partial Y} = \frac{\lambda_p v_p^2}{\lambda_i v_i^2} \frac{\partial T_p^*}{\partial Y} \quad \frac{\int C_p^*}{\int Y} = \frac{r D_{pi} n_i}{r_p D_{pp} n_p} \frac{\int C_i^*}{\int Y} \quad (6a-e)$$

Le coefficient de transfert de masse β_m caractérisant l'évaporation de l'eau à la surface externe de la paroi poreuse est déduit du coefficient de transfert de chaleur par convection naturelle entre cette paroi et le milieu ambiant en adoptant l'hypothèse de Lewis [7]. Les dernières conditions aux limites sur cette face s'écrivent alors:

- 0 ≤ X ≤ 1 ; Y = (L+EP)/H

$$v_p^* = -\frac{b_m H}{n_p} (C_{vs} - C_a) \quad ; \quad u_p^* = 0 \quad ; \quad b_m = \frac{Sh D_i}{H} \quad (7a-c)$$

$$\frac{\int C_p^*}{\int Y} = \frac{r_a g b_c H^4 b_m (C_{vs} - C_a)}{r_p D_{pp} n_p^2} \quad Nu = 0.479 \left[\frac{g b_T H^3 (T_s - T_\infty)}{n_p^2} \right]^{1/4} \quad (8a-b)$$

$$\frac{\partial T_p^*}{\partial Y} = \frac{g L_{vp} \rho_a \beta_T H^4 \beta_m (C_{vs} - C_a)}{\lambda_p v_p^2} + \frac{g \beta_T H^4 P_s \alpha_{abs}}{\lambda_p v_p} + Nu \frac{\lambda_a}{\lambda_p} T_p^* \quad (9)$$

Nous définissons les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux au niveau de la paroi poreuse:

$$Nu_p = -\frac{X}{\left(T_i^* \Big|_s - T_i^* \right)} \frac{\partial T_i^*}{\partial Y} \Big|_s \quad Sh_p = -\frac{X}{\left(C_i^* \Big|_s - C_i^* \right)} \frac{\partial C_i^*}{\partial Y} \Big|_s \quad (10a-b)$$

Les nombres de Nusselt et de Sherwood moyens sont obtenus en intégrant, par la méthode de Simpson, le long de la paroi verticale, les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux

Ainsi, pour un air ambiant dont la température et l'humidité relative sont élevées, l'évaporation est faible et le flux de chaleur absorbé par la face externe sera intégralement transféré par conduction-convection à travers la paroi poreuse. Dans l'enceinte et la paroi poreuse, les forces volumiques d'origine thermique et massique sont donc pour un rapport de forme et un matériau poreux donnés, d'autant plus élevées que la température de la face externe et l'humidité relative de l'air ambiant sont importantes (figures 2- 5).

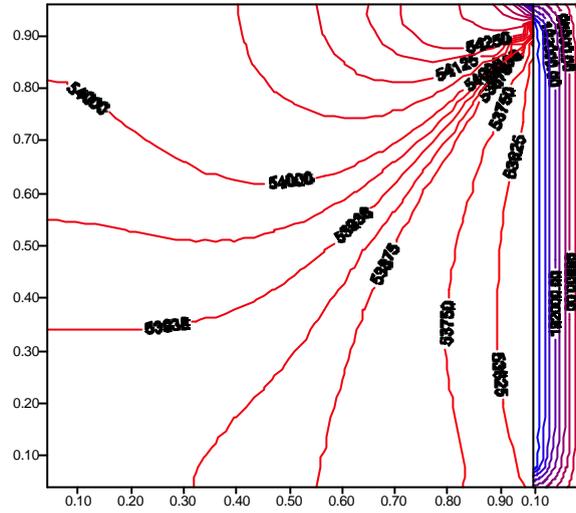


Figure 6 : Isoconcentrations dans l'enceinte et dans la paroi poreuse
 $Gr^* = 3.4 \cdot 10^8$ et $Da = 10^{-1}$; $L/H = 1$

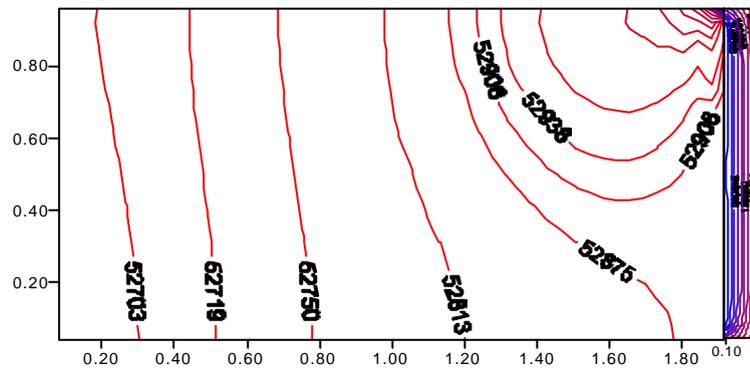


Figure 7 : Isoconcentrations dans l'enceinte et dans la paroi poreuse
 $Gr^* = 3.4 \cdot 10^8$ et $Da = 10^{-1}$; $L/H = 2$

Afin de traduire l'influence du rapport de forme, de la perméabilité du milieu poreux et de la densité du flux de chaleur appliqué sur la face externe de la paroi poreuse, nous avons cherché à exprimer les nombres de Nusselt et de Sherwood moyens comme des fonctions du nombre de Grashof modifié et du rapport de forme (figure 8).

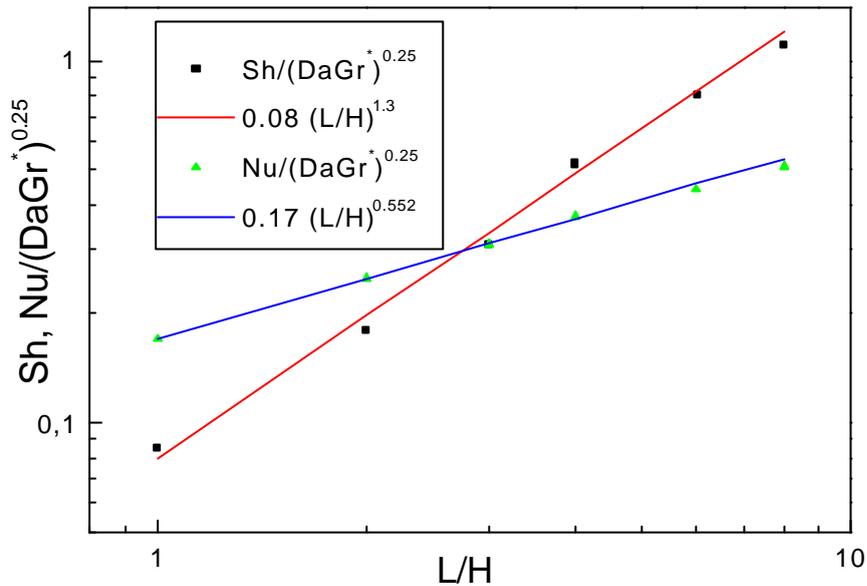


Figure 8 : Evolution du nombre de Nusselt et de Sherwood Moyens pour différents rapports de forme et nombre de Darcy-Grashof modifié

En utilisant la technique des moindres carrés, nous obtenons les relations suivantes :

$$\overline{Nu} = 0.17 \left(DaGr^* \right)^{0.25} (L/H)^{0.552}$$

$$\overline{Sh} = 0.08 \left(DaGr^* \right)^{0.25} (L/H)^{1.3} \quad \text{avec} \quad 1.0 \leq L/H \leq 8.0 \quad \text{et} \quad 10^7 \leq DaGr^* \leq 10^{10}$$

L'écart entre les valeurs déduites de ces corrélations avec celles obtenues après la résolution des équations de transfert dans l'enceinte est inférieur à 7%. Les coefficients de transfert de chaleur et masse déduits de ces corrélations ne peuvent pas être utilisés pour une exploitation à des fins de climatisation passive parce que les calculs ont été effectués en considérant une enceinte fermée sans puits ni source de chaleur.

4. CONCLUSION

Nous avons procédé à une étude numérique de la convection naturelle dans une enceinte parallélépipédique dont l'une des parois est assimilée à un matériau poreux saturé d'eau. Nos résultats montrent que les transferts de chaleur et de masse sont essentiellement fonctions de la densité de flux de chaleur appliqué sur la face externe de la paroi et du rapport de forme de l'enceinte. Les transferts de chaleur et de masse caractérisés par les nombres de Nusselt et de Sherwood sont d'autant plus élevés que la densité de flux de chaleur appliqué sur la face externe de la paroi poreuse et le rapport de forme sont grands.

Nomenclature

C : fraction massique de vapeur d'eau dans l'air,
Cp : capacité calorifique massique à pression constante, $J.kg^{-1}.K^{-1}$
D : coefficient de diffusion moléculaire de la vapeur d'eau dans l'air, $m^2.s^{-1}$

DaGr* : nombre de Darcy-Grashof modifié, $DaGr^* = g \beta_T K \Phi_S H^2 (\rho C_p)_p / \lambda_p^2 \nu_p$
EP : épaisseur de la paroi poreuse, m
g : coefficient d'accélération de la pesanteur, $m.s^{-2}$
H : hauteur de l'enceinte, m

h_c : coefficient de transfert de chaleur par convection, $W.m^{-2}.K^{-1}$
 K : perméabilité du milieu poreux, m^2
 L : largeur de l'enceinte, m
 L_v : chaleur latente massique d'évaporation, $J.kg^{-1}$
 Nu : nombre de Nusselt local,
 p : pression, Pa
 Pr : nombre de Prandtl, $Pr = \mu C_p / \lambda$
 Sc : nombre de Schmidt, $Sc = \nu / D$
 Sh : nombre de Sherwood local,
 t : temps, s
 T : température, K
 u : composante de la vitesse dans la direction x, $m.s^{-1}$
 v : composante de la vitesse dans la direction y, $m.s^{-1}$
 x, y : coordonnées cartésiennes, m
Lettres grecques
 α_{abs} : coefficient d'absorption de la paroi poreuse,
 β : coefficient de dilatation de l'air dans l'enceinte,

β_m : coefficient de transfert de masse par convection, m^{-1}
 λ : conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$
 μ : viscosité dynamique, $kg.m^{-1}.s^{-1}$
 ν : viscosité cinématique, $m^2.s^{-1}$
 ρ : masse volumique, $kg.m^{-3}$
 τ : temps adimensionnel,
 Ω : vorticité, s^{-1}
 Ψ : fonction de courant, $m^2.s^{-1}$
 Φ : densité de flux de chaleur, $W.m^{-2}$
Indices
 a : milieu ambiant
 c : massique
 k : i, enceinte, p : paroi poreuse
 p : paroi poreuse
 S : solaire
 T : thermique
 vs : vapeur saturante
 0 : initiale
Exposants
 $*$: valeur adimensionnelle
 $-$: valeur moyenne

REFERENCES

- [1] G. De Vahl Davis, *Natural convection of air in a square cavity a bench mark numerical solution*, Int. J. Num. Meth. Fluid, 3 (1983) pp. 249-264
 [2] M. M. Ganzarolli, L. F. Milanez, *Natural convection in rectangular enclosures heated from below and symmetrically cooled from the sides*, Int. J. Heat Mass Transfer, 38, n° 6 (1995) pp. 1063-1073
 [3] O. Aydin, A. Ünal, T. Ayhan, *Natural convection in rectangular enclosures heated from one side and cooled from the ceiling*, Int. J. Heat Mass Transfer, 42, n° 13 (1999) pp. 2345-2355
 [4] D. Angirasa, G. P. Peterson, I. Pop, *Combined heat and mass transfer by natural convection with opposing buoyancy effects in a fluid saturated porous medium*, Int. J. Heat Mass Transfer, 40, n° 12 (1997) pp. 2755-1773
 [5] L. Kalla, M. Mamou, P. Vasseur, L. Robillard, *Multiple steady states for natural convection in a shallow porous cavity subject to uniform heat fluxes*, Int. Comm. Heat Mass Transfer, 26, n° 6 (1999) pp. 761-770
 [6] A. A. Mohamad, R. Bennacer, *Double diffusion, natural convection in an enclosure filled with saturated porous medium subjected to cross gradients; stably stratified fluid*, Heat and mass Transfer, 45, n° 18 (2002) pp. 3725-3740
 [7] J. F. Sacadura, *Initiation aux transferts thermiques*, Techniques et Documentation, éd. Lavoisier (1993), 4^{ème} édition.