

COMPARAISONS DES MOYENNES STATISTIQUES DE FAVRE ET DE REYNOLDS D'UN JET TURBULENT AXISYMETRIQUE DE MELANGE ISOTHERME

Hatem HOUCINE, Adel GHARBI et Taïeb LILI

Faculté des Sciences de Tunis, Département de Physique, Laboratoire de Mécanique des Fluides
Campus Universitaire, le Belvédère, 1060 Tunis – TUNISIE.

Résumé – L'objectif de cette étude est de proposer une simulation numérique d'un jet turbulent axisymétrique de mélange gazeux binaire isotherme. Une procédure de prédiction d'écart entre grandeurs statistiques au sens de Favre et grandeurs statistiques au sens de Reynolds à partir d'un modèle au second ordre basé sur la moyenne pondérée par la masse est proposée. Cette procédure utilise des relations de passage entre grandeurs statistiques, relations qui s'appuient sur l'équation d'état du mélange et qui s'expriment à l'aide de corrélations faisant intervenir la fluctuation de la fraction massique de l'un des constituants du mélange. La validité de cette méthode de prédiction d'écart est testée par référence aux résultats expérimentaux de l'Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre (I.R.P.H.E) de Marseille relatifs au développement d'un jet d'hélium ou de dioxyde de carbone s'épanouissant dans un faible co-courant d'air.

Mots clés : Jet, Mélange binaire, Favre, Reynolds.

Nomenclature

a, b	Constantes de la loi d'état du mélange gazeux binaire.	Lettres grecques :
c', c''	Fluctuations de la concentration massique au sens de Reynolds et au sens de Favre.	d_{ij} Symbole de Kronecker.
C	Concentration massique instantanée.	μ Viscosité dynamique. $\text{Kg m}^{-1} \text{S}^{-1}$
D	Diffusivité massique. $\text{Kg m}^{-1} \text{S}^{-1}$	ρ Masse volumique. Kg m^{-3}
D_j	Diamètre de la buse.	ρ_j Masse volumique du jet primaire.
		ρ_e Masse volumique de co-courant secondaire.
g_i	Composante i de la gravité. mS^{-2}	
L_U	Demi-largeur des profils de vitesse longitudinale.	
L_C	Demi-largeur des profils de concentration.	
P	Pression instantanée. Nm^{-2}	
r	Distance à l'axe du jet. m	
R_j	Nombre de Reynolds du jet.	
u'_i, u''_i	Composante des fluctuations au sens de Reynolds et de Favre de la vitesse U_i . mS^{-1}	
U, V	Vitesses longitudinale et radiale instantanées. mS^{-1}	
X	Distance à la buse. m	

1. INTRODUCTION

Les variations de la masse volumique peuvent être dues à des écarts importants de température au sein d'un même fluide, à un mélange de deux fluides miscibles de masse volumiques différentes ou encore à des effets de compressibilité. Dans le cas de mélange, ces variations de masse volumiques conduisent à une formulation mathématique complexe due au couplage entre les équations du champ dynamique (équation de continuité, équations de Navier-Stokes) et l'équation de conservation de la masse. L'étude numérique a pour base les modèles de turbulence avec fermeture sur les moments du second ordre, ce niveau de fermeture apparaît comme étant le niveau minimum où une approche physique réaliste des termes présents dans les équations peut être développée, les modèles d'ordres inférieurs constituant alors des simplifications des modèles du second ordre dans l'optique d'utilisation plus restrictive.

2. MODELES DE TURBULENCE EN MOYENNE DE FAVRE ET EN MOYENNE DE REYNOLDS

2.1 Equations instantanées

En l'absence de réaction chimique et lorsque les forces à distance se réduisent aux seules forces de gravité, les équations générales décrivant l'évolution d'un mélange de deux gaz inertes sont les équations de continuité, de la quantité de mouvement, de bilan de masse et l'équation d'état.

2.1.1 Equation de continuité

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{r} U_k) = 0 \quad (1)$$

2.1.2 Equation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{r} U_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{r} U_i U_k) = \mathbf{r} g_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mathbf{m} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \mathbf{m} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \mathbf{d}_{ik} \right] \quad (2)$$

2.1.3 Equation du bilan de masse de l'espèce

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{r} C) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{r} C U_k) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mathbf{r} D \frac{\partial C}{\partial x_k} \right) \quad (3)$$

2.1.4 Equation d'état

$$\mathbf{r} = \frac{1}{aC + b} \quad (4)$$

2.2 Méthodes statiques

2.2.1 Décomposition en moyenne classique

Dans la décomposition classique du champ turbulent, on définit la grandeur macroscopique comme étant égale à la moyenne d'ensemble, soit :

$$\Phi = \bar{\Phi} + \mathbf{j}' \quad (5) \quad \text{avec} \quad \overline{\mathbf{j}'} = 0$$

Avec cette décomposition, dite de Reynolds, la fluctuation est centrée car sa moyenne est nulle.

2.2.2 Décomposition en moyenne pondérée par la masse :

Dans ce cas, la grandeur macroscopique de l'écoulement turbulent est définie comme étant la moyenne pondérée par la masse, soit :

$$\Phi = \tilde{\Phi} + \mathbf{j}'' \quad (6) \quad \text{avec} \quad \tilde{\Phi} = \frac{\overline{\mathbf{r}\Phi}}{\mathbf{r}} \quad \text{et} \quad \overline{\mathbf{r}\mathbf{j}''} = 0$$

Ainsi, ce n'est pas la fluctuation \mathbf{j}' qui est centrée, mais la quantité $\mathbf{r}\mathbf{j}''$.

Par rapport à la décomposition classique, celle-ci, introduite par Favre [1], a l'avantage de simplifier l'écriture des équations de transport.

Il y a lieu de préciser que les décompositions de la masse volumique ρ et de la pression P sont les mêmes dans les deux méthodes.

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}} + \mathbf{r}' \quad (7) \quad \text{avec} \quad \mathbf{r}' = 0$$

$$P = \bar{P} + P' \quad (8) \quad \text{avec} \quad P' = 0$$

2.2.3 Equations statistiques

La moyenne statistique des équations précédentes se résument dans le tableau 1.

Tableau 1 : Modèles de turbulence en moyenne de Favre et en moyenne de Reynolds

$\bar{r} = \frac{1}{a\tilde{C} + b}$ (9.a)	$\bar{r} = \frac{1}{a\bar{C} + b} \left(1 + \frac{a^2 \overline{c'^2}}{(a\bar{C} + b)^2} \right)$ (9.b)
$\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{r} \tilde{U}_k) = 0$ (10.a)	$\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{r} \bar{U}_k - a \bar{r}^2 \overline{c' u'_k}) = 0$ (10.b)
$\bar{r} \tilde{U}_k \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \bar{r} g_i - \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{r} \tilde{u}_k \tilde{u}_i)$ (11.a)	$\begin{aligned} (\bar{r} \bar{U}_k - a \bar{r}^2 \overline{c' u'_k}) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} = & -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \bar{r} g_i \\ & - \frac{\partial}{\partial x_k} [\bar{r} \overline{u'_i u'_k} - a \bar{r}^2 \overline{c' u'_i} \bar{U}_k] \end{aligned}$ (11.b)
$\bar{r} \tilde{U}_k \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{r} \tilde{u}_k \tilde{c})$ (12.a)	$(\bar{r} \bar{U}_k - a \bar{r}^2 \overline{c' u'_k}) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k} [\bar{r} \overline{c' u'_k} - a \bar{r}^2 \overline{c'^2} \bar{U}_k]$ (12.b)

De même, on détermine les équations statistiques de transport en moyenne de Favre et en moyenne de Reynolds, des tensions de Reynolds, des flux turbulents du concentration, et des dissipations dynamique et massique. La modélisation des équations en moyenne pondérée par la masse est déduite des modèles classiques de Hanjalic & Launder [2] et Launder & col [3], les constantes utilisés sont celles proposées par Gibson et Launder [4] en incompressible. Pour le modèle de Reynolds, tous les termes dus aux variations de densité apparaissent explicitement et ne sont plus englobés dans la moyenne d'ensemble comme dans la proche en moyenne pondérée.

3 . METHODES NUMERIQUES

Toutes les équations sont de type convection-diffusion avec termes sources, la discrétisation de ces équations se fait en utilisant la méthode des volumes finis décrite par patankar [5].

Le système d'équations est résolu dans un volume cylindrique avec l'hypothèse d'axisymétrie, le modèle est implanté dans un code elliptique en volumes finis dérivé du code T.E.A.M (Turbulent Elliptic Axisymmetric Manchester) proposé par Huang & Leschziner [6], ce code fait appel à plusieurs techniques stabilisatrices, telles que : maillages décalées pour les composantes de vitesses moyennes et pour les composantes des deuxièmes moments turbulents.

4. EXPERIENCE

Du point de vue expérimental, il s'agit d'un jet turbulent de gaz (de masse volumique ?;) débouchant dans l'air (de masse volumique ?;) animé d'une faible vitesse, en situation légèrement confiné. Les mesures sont réalisées pour des jets pleinement turbulents dès l'émission en maintenant constant, entre les différents gaz, le flux de quantité de mouvement avec des nombres de Reynolds initiaux basés sur le diamètre de la buse valant $R_j = 7000, 21000$ et 32000 respectivement pour les jets d'hélium, d'air et de CO_2 , l'air sera pris comme référence.

5. RESULTATS

Dans cette partie, on étudie les résultats obtenus avec les modèles de Favre et de Reynolds en comparaison avec les données expérimentales recueillies à l'I.R.P.H.E. On présente les écarts qui existent entre les deux approches pondérée et non pondérée dans le cas du jet turbulent axisymétrique de mélange isotherme.

5.1 Vitesse longitudinale moyenne

Les figures (1, 2 et 3) montrent les profils axiaux et radiaux obtenus pour la vitesse longitudinale. On peut voir que le développement axial varie fortement en

fonction de rapport de densité $\frac{\rho_j}{\rho_e}$ entre le jet et le

fluide extérieur, conformément aux résultats expérimentaux. Pour le modèle de Favre, on présente la moyenne de Reynolds recalculée à partir de la moyenne de Favre et les flux turbulents de masse par la relation :

$$\bar{U}_k = \tilde{U}_k + a \bar{r} \tilde{c}'' u_k'' \quad (13)$$

Dans le cas du jet hélium-air, la vitesse longitudinale en moyenne de Reynolds, recalculée à partir des moyennes de Favre obtenues avec le modèle de Favre et de l'équation (13) est supérieure à celle déterminée par le modèle de Reynolds ou par l'expérience. On trouve l'inverse, mais moins prononcé du fait du plus faible écart de densité dans le cas du jet CO₂-air.

Les résultats concernant les profils radiaux sont proches pour les deux modèles. Toutefois le modèle de Reynolds permet d'obtenir des formes de profils se rapprochant plus de l'expérience qu'avec le modèle de Favre.

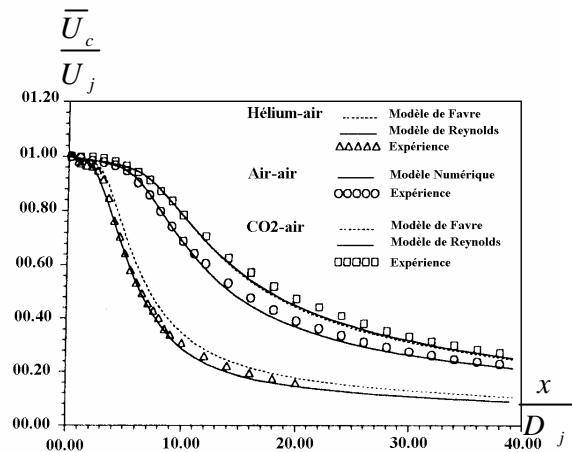


Fig 1 : Evolution axiale de la vitesse longitudinale au centre (jets : Hélium-air, Air-air et CO₂-air)

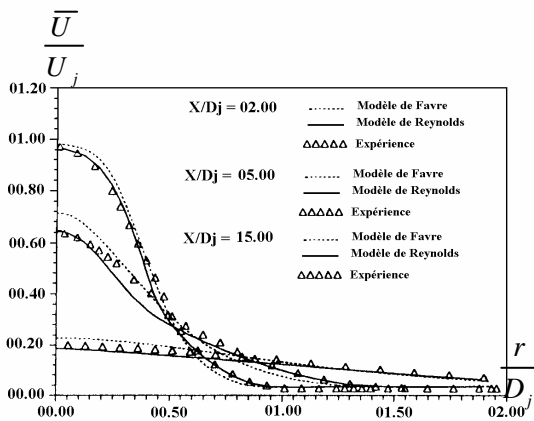


Fig 2 : Evolution radiale de la vitesse longitudinale (jet : Hélium-air)

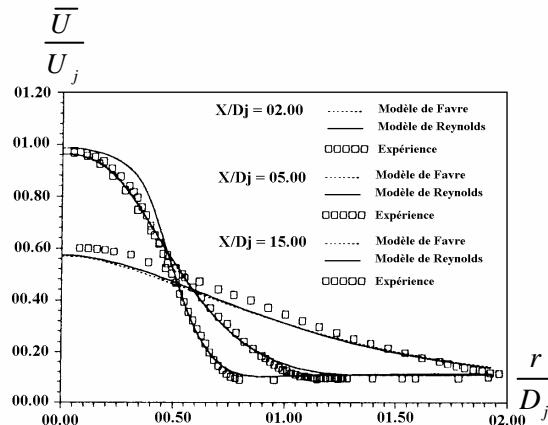


Fig 3 : Evolution radiale de la vitesse longitudinale (jet : CO₂-air)

5.2 Vitesse radiale moyenne

C'est sur la vitesse radiale que les différences entre les deux modèles apparaissent le plus distinctement en ce qui concerne les deux moyennes utilisées. Sur la figure 4, on voit que dans le jet hélium-air, les différences entre les deux moyennes sont très grandes et il est clair que les points expérimentaux représentent la moyenne de Reynolds, résultat qui a également été obtenue par Djeridane [7]. Les résultats numériques obtenus dans le jet CO₂-air montrent que si, pour les deux modèles, on regarde la moyenne de Reynolds, les résultats sont remarquablement proches entre eux et que l'utilisation de l'équation (13) pour recalculer la moyenne de

Reynolds fonctionne donc bien (figure 5), On peut également voir que \bar{V} est un peu différent de \tilde{V} mais les différences sont moins fortes que dans le jet hélium-air du fait que les flux turbulents de masse sont également moins forts. On note également que ces flux agissent dans des sens opposés, puisque entre le jet hélium-air et le jet CO₂-air, le paramètre « a » change de signe.

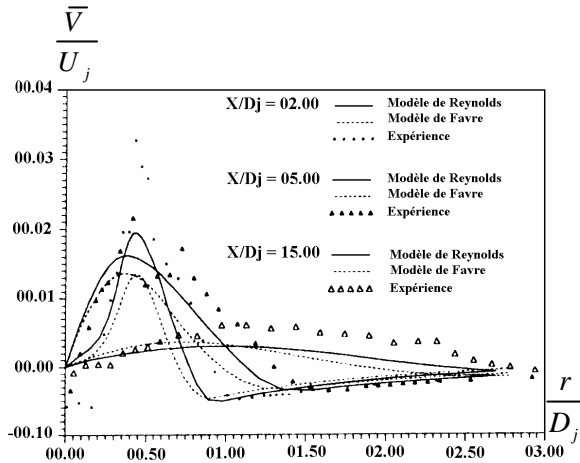


Fig 4 : Profils radiaux de la vitesse radiale.
(jet : Hélium-air)

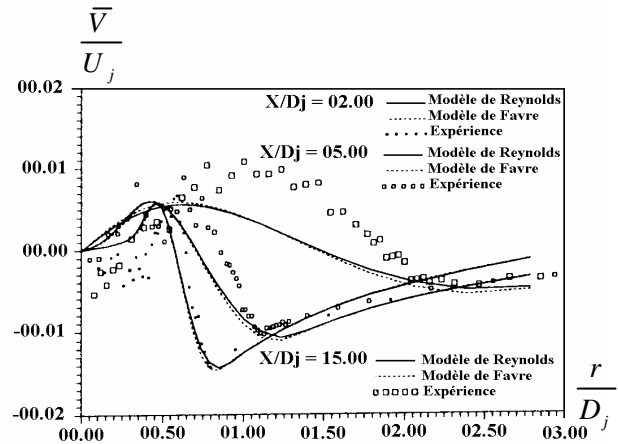


Fig 5 : Profils radiaux de la vitesse radiale.
(jet : CO₂-air)

Champ massique

Les résultats obtenus pour le champ de concentration (figure 6) sont un peu différents pour les modèles de Favre et de Reynolds, en particulier pour le jet hélium-air. Les différences entre les résultats des deux modèles semblent donc essentiellement dues aux écarts qui apparaissent déjà pour le champ dynamique. Généralement, le modèle de Reynolds donne les meilleurs résultats par rapport aux données expérimentales.

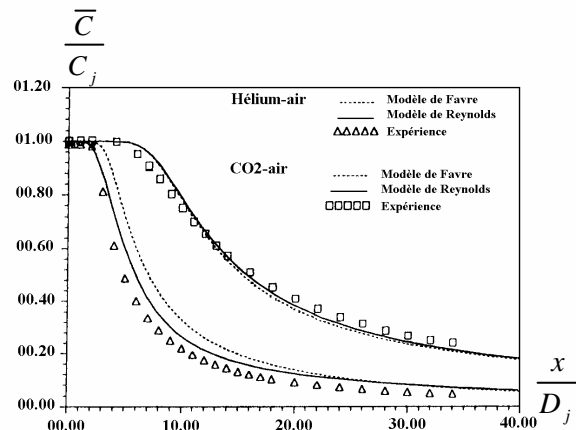


Fig 6 : Evolution axiale de la concentration massique
(jets : Hélium-air et CO₂-air)

5.3 Elargissement des profils de vitesse longitudinale et de concentration :

Nous avons vu qu'avec le modèle de Favre, les différences obtenues entre \bar{V} et \tilde{V} étaient fortes dans le jet hélium-air. Ceci est dû au fait que $\bar{r} \cdot \tilde{V}$ et le flux turbulent de masse radial $\overline{r' \cdot v'}$ sont du même ordre de grandeur. Par contre, sur l'axe du jet, il existe peu de différence entre \bar{U} et \tilde{U} . Cependant, les résultats numériques montrent que les différences un peu plus importantes existent radialement, près de l'éjection, dans la couche de mélange créée par la buse. Ces différences peuvent donc modifier le calcul de la demi-largeur des profils de vitesse longitudinale suivant que l'on se base sur \bar{U} ou sur \tilde{U} pour effectuer ce calcul, surtout dans les premiers diamètres.

Sur la figure 7 on reporte donc pour les deux modèles de Favre et de Reynolds les demi-largeurs basées sur la vitesse longitudinale moyenne au sens de Reynolds. On voit que les résultats obtenus sont meilleurs avec le modèle de Reynolds, surtout pour le jet hélium-air. Avec les deux modèles, on retrouve bien les résultats

expérimentaux si l'on regarde les évolutions de cette grandeur avant 5 diamètres. Les résultats indiquent un rétrécissement du jet hélium-air dans les trois premiers diamètres, puis un élargissement très rapide jusqu'à environ 15 diamètres. Le comportement inverse est obtenu dans le cas du jet de CO₂-air, qui s'élargit dès l'éjection, avec toutefois une plus faible intensité car le rapport de densité reste plus près de l'unité. Toutefois, l'effet des variations de densité sur l'élargissement du profil de vitesse longitudinale reste limité à la zone initiale de ces jets et un taux commun aux différents gaz est retrouvé plus en aval, ce qui signifie l'emploi d'une même loi linéaire pour cette quantité en zone de pseudo-similitude des jets libres.

La figure 8 montre que les remarques faites pour L_U sont également valables pour l'évolution de la demi-largeur des profils de concentration L_C .

Finalement, les résultats obtenus pour les grandeurs moyennes sont en bon accord général avec les résultats expérimentaux. Le modèle de Reynolds est globalement meilleur que le modèle de Favre. Les résultats obtenus pour les grandeurs macroscopiques montrent qu'il faut faire très attention à l'interprétation des résultats obtenus en moyenne de Favre car les flux turbulents de masse peuvent modifier de façon considérable certaines d'entre elles.

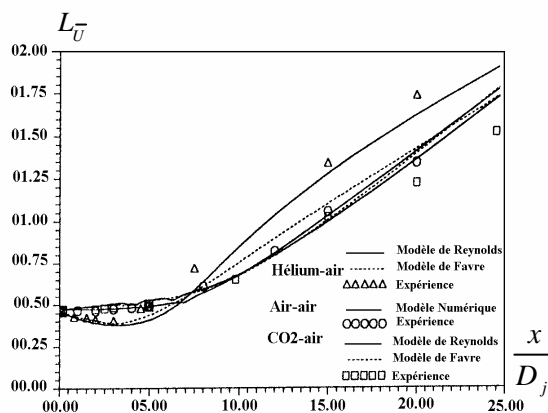


Fig 7 : Elargissements des profils de la vitesse longitudinale (jets : Hélium-air, Air-air et CO₂-air)

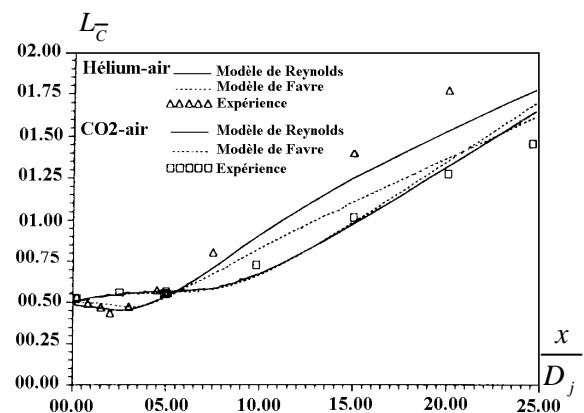


Fig 8 : Elargissements des profils de la concentration massique (jets : Hélium-air et CO₂-air)

5.4 Grandeurs turbulentes

les résultats obtenus pour les moments d'ordre deux avec les modèle de Reynolds et de Favre étant proches, il est pratiquement impossible d'imputer les différences obtenues à la moyenne utilisée ou bien aux modélisations puisque celles-ci sont différentes dans les approches pondérée et non pondérée. On présentera donc les moments statistiques au sens de Favre et ceux au sens de Reynolds.

Nous avons vu que les décroissances axiales de la vitesse longitudinale et du concentration sont très affectées par les variations de densité. Ceci est dû au fait que, suivant que le rapport de densité est supérieur ou inférieur à 1, l'agitation turbulente et plus ou moins forte, ce qui donne un mélange plus ou moins rapide avec le milieu ambiant dans lequel débouche le jet.

Ainsi, on retrouve avec les deux modèles les propriétés observées expérimentalement sur les tensions de Reynolds .

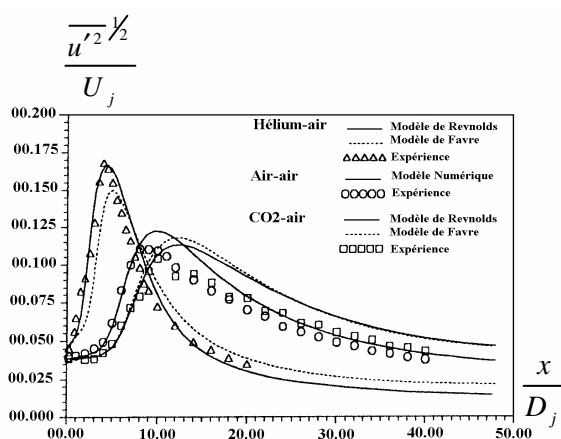


Fig 9 : Evolution axiale de l'écart type de la vitesse longitudinale (jets : Hélium-air, Air-air et CO₂-air)

- Les pics des tensions de Reynolds se rapprochent de la buse d'éjection lorsque le jet est plus léger et inversement (figure 9).
- Les intensités des pics sont plus fortes dans le cas du jet hélium-air et moins fortes dans le cas du jet CO₂-air que celles obtenues dans l'air.
- Le mélange étant plus rapide dans les jets légers ($\frac{\rho_j}{\rho_e} < 1$), les profils radiaux des tensions de Reynolds atteignent une forme asymptotique plus rapidement que dans un jet à densité constante, et inversement pour les jets lourds ($\frac{\rho_j}{\rho_e} > 1$) (figures 10 et 11).

Le modèle de Reynolds donne tout de même de meilleurs résultats, principalement sur l'intensité des pics des écarts types de vitesse longitudinale. Les formes de ces profils sont également mieux déterminées, en particulier en ce qui concerne leurs évolutions rapides vers un comportement pseudo-asymptotique et leurs largeurs, dans les premiers diamètres du jet hélium-air. Ceci explique en partie les bons résultats obtenus avec le modèle de Reynolds pour les élargissements des profils macroscopiques moyens L_U et L_C . Dans le cas du jet CO₂-air, les deux modèles donnent pratiquement les mêmes résultats.

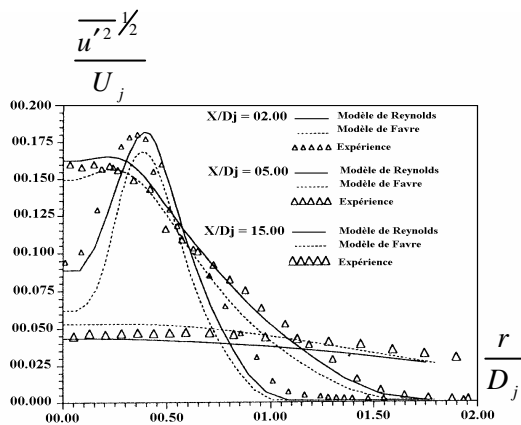


Fig 10 : Evolution radiale de l'écart type de la vitesse longitudinale. (jet : Hélium-air)

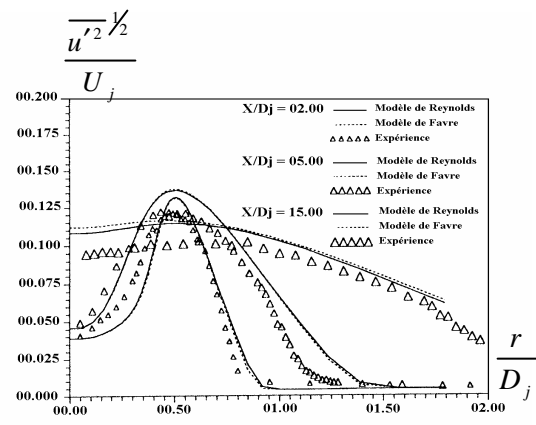


Fig 11 : Evolution radiale de l'écart type de la vitesse longitudinale. (jet : CO₂-air)

6. CONCLUSION

Les travaux développés dans cette étude ont permis de tester les modèles de transport à l'ordre deux en moyenne de Favre et en moyenne de Reynolds sur l'écoulement d'un jet turbulent axisymétrique de mélange isotherme. La mise en œuvre simultanée de ces deux décompositions moyennes à partir des mêmes méthodes numériques et des mêmes conditions aux limites a permis de montrer leurs principales caractéristiques. Ainsi, on a pu montrer que ces deux méthodes donnent des résultats assez proches dans les différentes régions du jet. En effet, dans la zone initiale du jet, on a montré que les résultats fournis par les deux approches sont similaires tout en tenant compte, pour chaque variable, des relations qui existent entre les moyennes de Reynolds et les moyennes de Favre. Ces relations faisant intervenir des flux turbulents de densité aux différents ordres, les écarts entre les deux moyennes s'estompent dès que les variations de densité diminuent.

Ainsi, sur la base des résultats obtenus, on peut tirer les conclusions suivantes :

- Le développement initial du champ dynamique et massique d'un jet turbulent de mélange isotherme est essentiellement gouverné par le rapport de densité ρ_j/ρ_e .
- L'influence de la variation de la densité sur l'entraînement du fluide extérieur par le jet est clairement établie dans la région initiale, puisqu'un gaz plus léger que l'ambient dans lequel s'épanouit, l'hélium par exemple, se mélange plus rapidement, et donc possède un entraînement plus important, qu'un gaz lourd.

7. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] : FAVRE A. (1965)

“Equations des gaz turbulents compressibles”.
J. de Méc. Vol. 4, pp. 361-421.

[2] : HANJALIC K. & LAUNDER B.E. (1972)

“A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flow”.
J. Fluid Mech., vol. 52, n°4. p. 609.

[3] : LAUNDER B.E., REECE G.J. & RODI W. (1975)

“Progress in the developpement of a Reynolds-stress turbulence closure”.
J. Fluid Mech., vol. 68, n°3, pp. 537-566.

[4] : GIBSON M.M. & LAUNDER B.E. (1978)

“Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer”.
J. Fluid Mech., vol. 86, n°3, pp. 491-511.

[5] : PATANKAR S.V. (1980)

“Numerical heat transfert and fluid flow”.

Series in computational methods in mechanics and thermal sciences, Hemisphere Publishing Corporation & Mc Graw Hill B.C..

[6] : HUANG P.G & LESCHZINER M.A. (1985)

“Stabilization of recirculating flow computations performed with a second moment closures and third order discretization”.

Vth Int. Symp. on Turb. Shear Flows, Cornell Univ., August 7-9

[7] : DJERIDANE T. (1994)

“Contribution à l'étude expérimentale de jets turbulents axisymétriques à densité variable”.
Thèse de Doctorat, Univ. Aix-Marseille II.